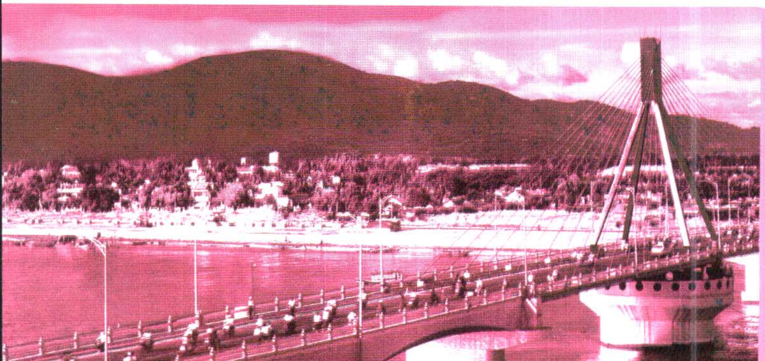
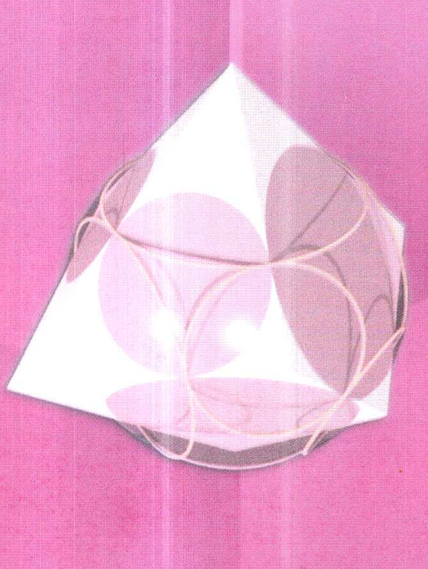
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HÌNH HỌC

12





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ biên)
NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)
KHU QUỐC ANH – TRẦN ĐỨC HUYÊN

HÌNH HỌC

12

SÁCH IN THỬ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Kí hiệu dùng trong sách

△ Hoạt động của học sinh trên lớp

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục – Bộ Giáo dục và Đào tạo.

720-2007/CXB/520-1571/GD

Mã số : CH202M8

CHƯƠNG I

KHỐI ĐA DIỆN

- Khái niệm về khối đa diện
- Khối đa diện đều
- Thể tích khối đa diện

Một khối muối ăn

Trong thực tế chúng ta thường gặp những vật thể không gian được giới hạn bởi các đa giác như viên gạch, khối lập phương, kim tự tháp Ai Cập, tinh thể của một số hợp chất hoá học như muối ăn, phèn chua .... Những vật thể đó được gọi là những khối đa diện. Về mặt toán học, việc định nghĩa chính xác khối đa diện không đơn giản. Trong chương này ta chỉ giới thiệu khái niệm về khối đa diện, khối đa diện đều và đưa ra công thức tính thể tích của một số khối đa diện quen thuộc.

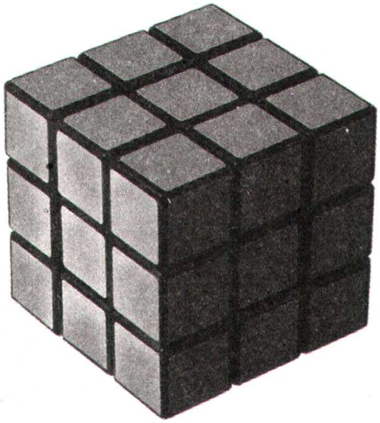
§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

△1 Nhắc lại định nghĩa hình lăng trụ và hình chóp.

I- KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

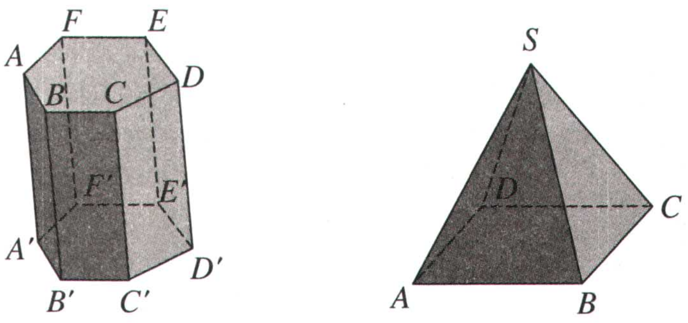
Quan sát khối rubic trong hình 1.1, ta thấy các mặt ngoài của nó tạo thành một hình lập phương. Khi đó ta nói khối rubic có hình dáng là một khối lập phương. Như vậy có thể xem khối lập phương là phần không gian được giới hạn bởi một hình lập phương, kể cả hình lập phương ấy.

Tương tự, khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy, khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy, khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.



Hình 1.1

Tên của khối lăng trụ hay khối chóp được đặt theo tên của hình lăng trụ hay hình chóp giới hạn nó. Chẳng hạn ứng với hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ ta có khối lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, ứng với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ ta có khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (h.1.2) ...

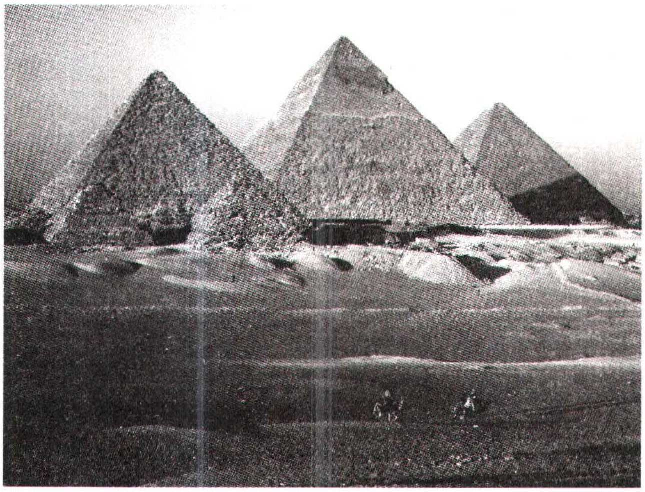


Hình 1.2

Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy... của một hình lăng trụ (hình chóp, hay hình chóp cụt) theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy... của khối lăng trụ (khối chóp, hay khối chóp cụt) tương ứng.

Điểm không thuộc khối lăng trụ được gọi là *điểm ngoài* của khối lăng trụ, điểm thuộc khối lăng trụ nhưng không thuộc hình lăng trụ ứng với khối lăng trụ đó được gọi là *điểm trong* của khối lăng trụ. Điểm trong hay điểm ngoài của khối chóp, khối chóp cụt cũng được định nghĩa tương tự.

Ví dụ

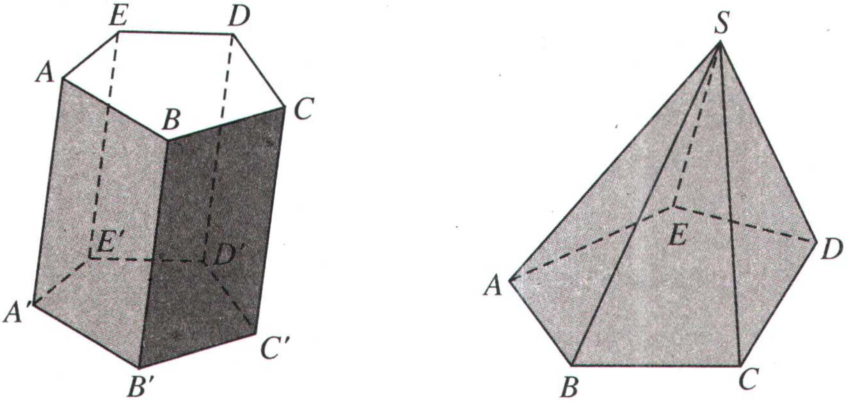


Hình 1.3

Kim tự tháp ở Ai Cập là kì quan duy nhất trong bảy kì quan của thế giới cổ đại còn lại đến ngày nay, chúng có hình dáng là những khối chóp tứ giác đều.

II- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện



Hình 1.4

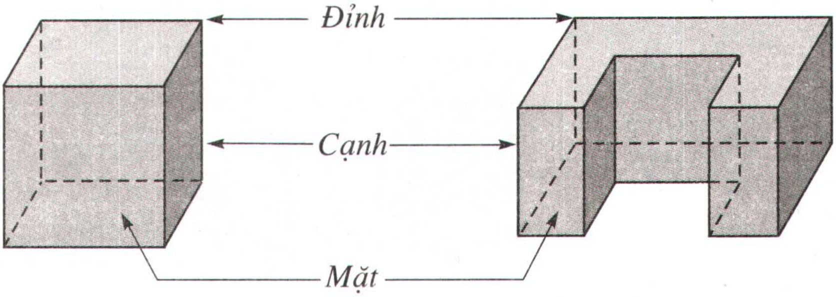
2 Kể tên các mặt của hình lăng trụ $ABCDE.A'B'C'D'E'$ và hình chóp $S.ABCDE$ (h.1.4).

Quan sát các hình lăng trụ, hình chóp nói ở trên ta thấy chúng đều là những hình không gian được tạo bởi một số hữu hạn đa giác. Các đa giác ấy có tính chất :

> *a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.*
>
> *b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.*

Người ta còn gọi các hình đó là các hình đa diện.

Nói một cách tổng quát *hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thoả mãn hai tính chất trên*. Mỗi đa giác như thế gọi là một *mặt* của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các *đỉnh, cạnh* của hình đa diện (h.1.5).



Hình 1.5

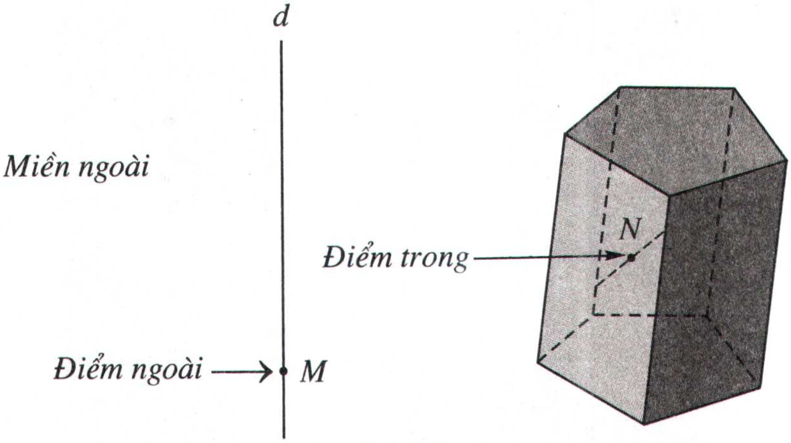
2. Khái niệm về khối đa diện

> *Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.*

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện giới hạn khối đa diện ấy được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là *miền trong*, tập hợp các điểm ngoài được gọi là *miền ngoài* của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.

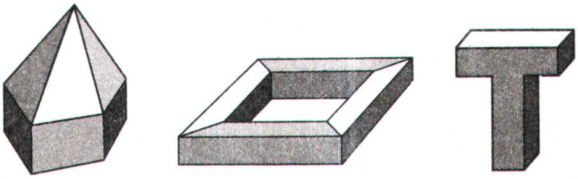
Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy.


d
Miền ngoài
N
Điểm trong
Điểm ngoài
M

Hình 1.6

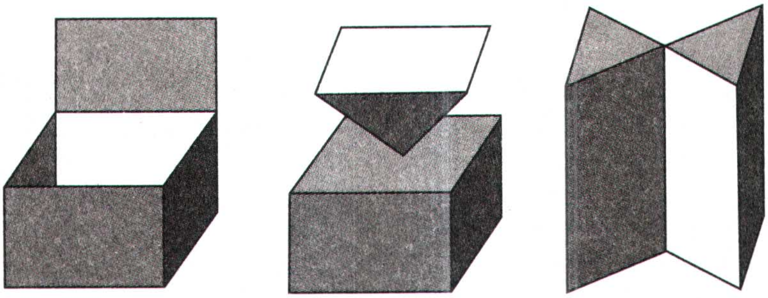
Ví dụ

– Các hình dưới đây là những khối đa diện :



Hình 1.7

– Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện :



a) b) c)

Hình 1.8

– Những viên kim cương tự nhiên có hình dạng là những khối đa diện :

Hình 1.9

△3 Giải thích tại sao hình 1.8c không phải là một khối đa diện ?

III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

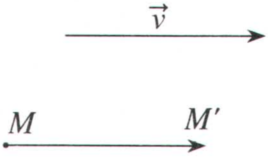
Phép biến hình và phép dời hình trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

> *Trong không gian quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M′ xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.*
>
> *Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tuỳ ý.*

Ví dụ

Trong không gian, các phép biến hình sau đây là những phép dời hình :

a) ***Phép tịnh tiến theo vectơ*** $\vec{v}$ **,** là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ (h.1.10a).

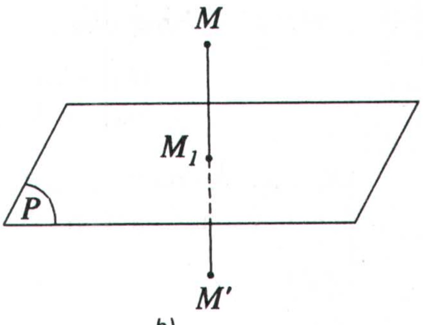


a)

Hình 1.10

b) ***Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)***, là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (*P*) thành chính nó, biến mỗi điểm *M* không thuộc (*P*) thành điểm *M'* sao cho (*P*) là mặt phẳng trung trực của *MM'* (h.1.10b).

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (*P*) biến hình (*H*) thành chính nó thì (*P*) được gọi là *mặt phẳng đối xứng* của (*H*).

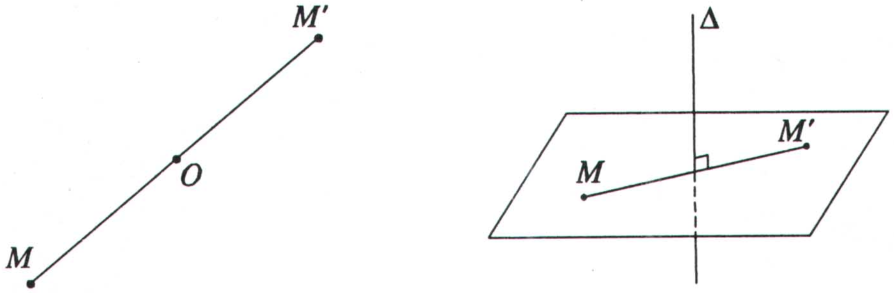


b)

Hình 1.10

c) ***Phép đối xứng tâm O***, là phép biến hình biến điểm *O* thành chính nó, biến mỗi điểm *M* khác *O* thành điểm *M'* sao cho *O* là trung điểm của *MM'* (h.1.11a).

Nếu phép đối xứng tâm *O* biến hình (*H*) thành chính nó thì *O* được gọi là *tâm đối xứng* của (*H*).



a) b)

Hình 1.11

d) ***Phép đối xứng qua đường thẳng*** Δ (hay phép đối xứng qua trục Δ), là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm *M* không thuộc Δ thành điểm *M'* sao cho Δ là đường trung trực của *MM'* (h.1.11b).

Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (*H*) thành chính nó thì Δ gọi là *trục đối xứng* của (*H*).

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (*H*) thành đa diện (*H'*) và biến đỉnh, cạnh, mặt của (*H*) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (*H'*).

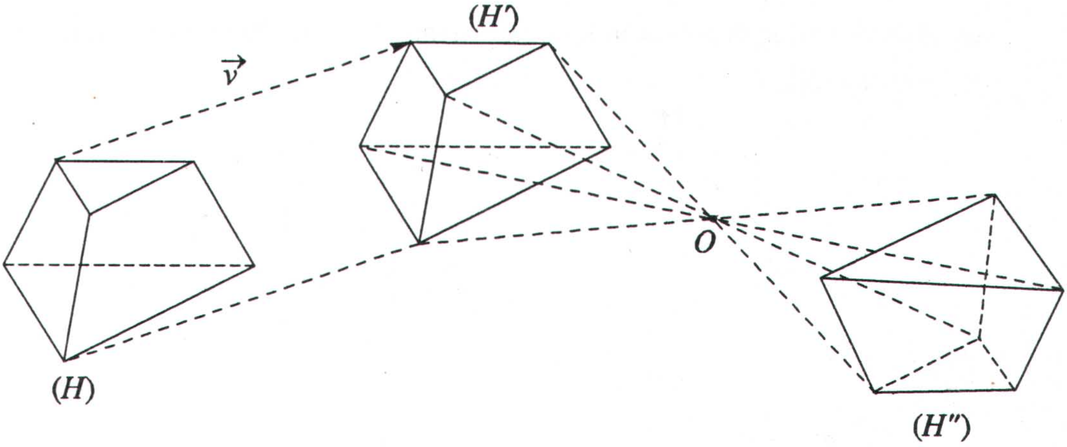
2. Hai hình bằng nhau

> *Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

Ví dụ

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến đa diện (H) thành đa diện (H'), phép đối xứng tâm O biến đa diện (H') thành đa diện (H''). Do đó phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên biến (H) thành (H''). Từ đó suy ra các đa diện (H), (H') và (H'') bằng nhau (h.1.12).

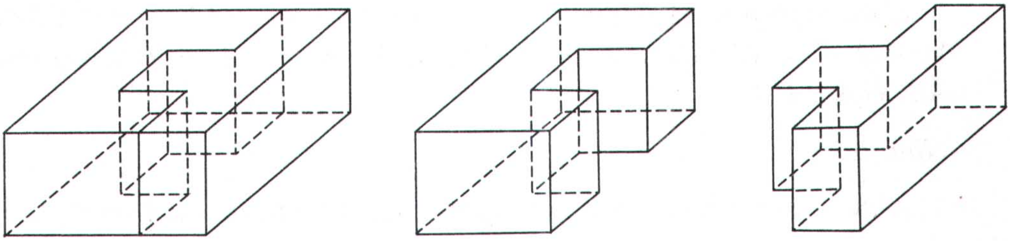


Hình 1.12

△4 Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Chứng minh rằng hai lăng trụ *ABD.A'B'D'* và *BCD.B'C'D'* bằng nhau.

IV- PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H) (h.1.13).

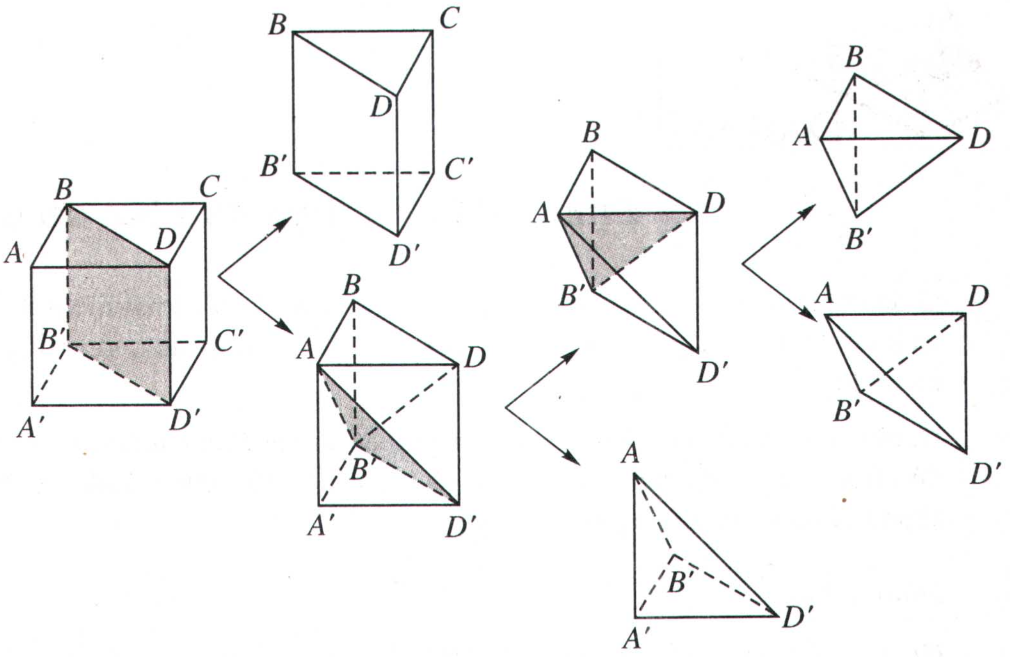


(H) (H_1) (H_2)

Hình 1.13

Ví dụ. Xét khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (P) đi qua $BDD'B'$ cắt khối lập phương đó theo một thiết diện là hình chữ nhật $BDD'B'$. Thiết diện này chia các điểm còn lại của khối lập phương ra làm hai phần. Mỗi phần cùng với hình chữ nhật $BDD'B'$ tạo thành một khối lăng trụ, như vậy ta có hai khối lăng trụ : $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$. Khi đó ta nói mặt phẳng (P) chia khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

Làm tương tự như trên ta có thể chia tiếp chẳng hạn khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ thành ba khối tứ diện : $ADBB'$, $ADB'D'$ và $AA'B'D'$ (h.1.14).



Hình 1.14

Làm theo quá trình ngược lại ta có thể ghép khối lăng trụ $BCD.B'C'D'$ và các khối tứ diện $ADBB'$, $ADB'D'$, $AA'B'D'$ với nhau để được khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Nhận xét

Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành các khối tứ diện.

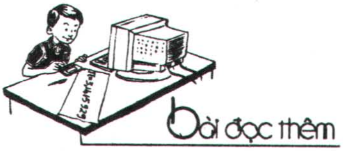
BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng một đa diện có các mặt là những tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.

2. Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.

3. Chia một khối lập phương thành năm khối tứ diện.

4. Chia một khối lập phương thành sáu khối tứ diện bằng nhau.



Định nghĩa đa diện và khối đa diện

Ở đầu chương chúng ta mới chỉ trình bày sơ lược về các khái niệm đa diện và khối đa diện. Bây giờ ta sẽ trình bày một cách chính xác hơn những khái niệm đó.

Người ta đưa ra nhiều cách định nghĩa đa diện và nói chung những định nghĩa đó không tương đương. Đa diện và khối đa diện vừa được trình bày trong chương I dựa vào định nghĩa sau đây.

Định nghĩa

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác, gọi là các mặt của hình đa diện, thoả mãn các tính chất sau :

a) Hai mặt phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh thuộc một mặt là cạnh chung của đúng hai mặt.

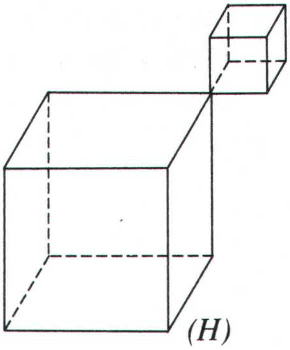
c) Cho hai mặt S và S′ luôn tồn tại một dãy các mặt $S_0, S_1, ..., S_n$ sao cho S_0 trùng với S, S_n trùng với S′ và bất kì hai mặt S_i, S_{i+1} nào $(0 \le i \le n-1)$ cũng đều có một cạnh chung.

Các đỉnh, cạnh của mặt theo thứ tự được gọi là các *đỉnh, cạnh* của hình đa diện.

Ví dụ

Hình (*H*) trong hình 1.15 là hình tạo bởi hai hình lập phương chỉ chung nhau một đỉnh. Khi đó (*H*) không thoả mãn tính chất c) nên nó không phải là một hình đa diện.

Từ định nghĩa trên người ta chứng minh được định lí sau gọi là định lí Gioóc-đan (Jordan) trong không gian.



Hình 1.15

Định lí

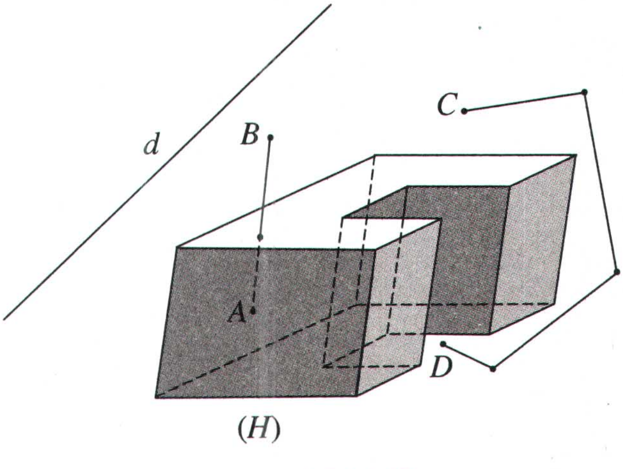
Mỗi đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền sao cho :

a) Hai điểm thuộc cùng một miền luôn có thể nối với nhau bằng một đường gấp khúc nằm hoàn toàn trong miền đó.

b) Mọi đường gấp khúc nối hai điểm thuộc hai miền khác nhau đều có điểm chung với đa diện.

c) Có một và chỉ một miền chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy.

Miền chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy được gọi là *miền ngoài* của đa diện, miền còn lại được gọi là *miền trong* của đa diện. Điểm thuộc miền ngoài gọi là *điểm ngoài*, điểm thuộc miền trong gọi là *điểm trong* của đa diện.



Hình 1.16

Trong hình 1.16, *A* là điểm trong, *B*, *C*, *D* là điểm ngoài của hình đa diện (*H*). Miền ngoài của (*H*) chứa đường thẳng *d*.

Định nghĩa

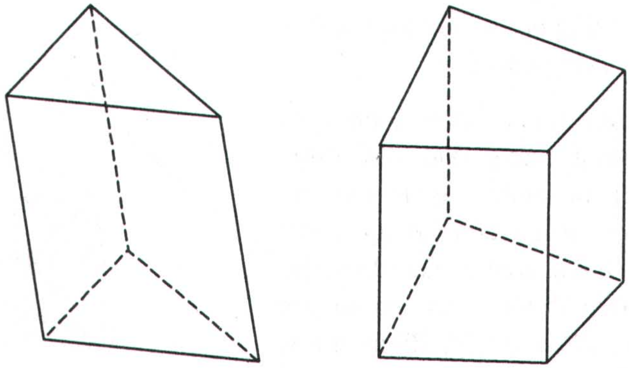
Đa diện cùng với miền trong của nó được gọi là một khối đa diện.

Trong thực tế chúng ta thường gặp những vật thể có hình dáng là những khối đa diện. Từ những công trình vĩ đại như kim tự tháp Ai Cập, những toà nhà cao tầng hiện đại đến những vật thể nhỏ như tinh thể của các hợp chất : đường, muối, thạch anh... Do đó việc nghiên cứu các khối đa diện không những làm phong phú thêm các kiến thức về hình học mà còn góp phần giải quyết nhiều bài toán thực tiễn, phục vụ cuộc sống con người.

§2. KHỐI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I- KHỐI ĐA DIỆN LỒI

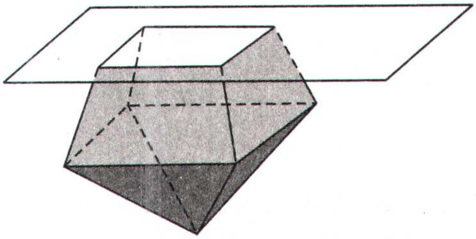
Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện xác định (H) được gọi là đa diện lồi (h.1.17).



Hình 1.17

Ví dụ. Các khối lăng trụ tam giác, khối hộp, khối tứ diện là những khối đa diện lồi.

Người ta chứng minh được rằng một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó (h.1.18).

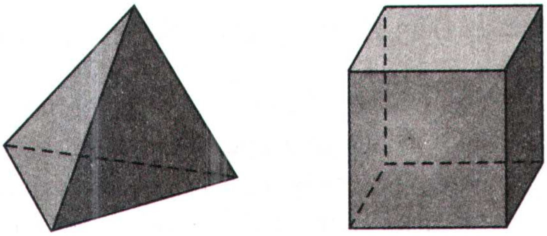


Hình 1.18

△1 Tìm ví dụ về khối đa diện lồi và khối đa diện không lồi trong thực tế.

II- KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Quan sát khối tứ diện đều (h.1.19a) ta thấy các mặt của nó là những tam giác đều, mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng ba mặt. Đối với khối lập phương (h.1.19b) ta thấy các mặt của nó là những hình vuông, mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng ba mặt. Những khối đa diện nói trên được gọi là những khối đa diện đều.



a) b)

Hình 1.19

> ***Định nghĩa***
>
> *Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây :*
>
> *a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.*
>
> *b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.*

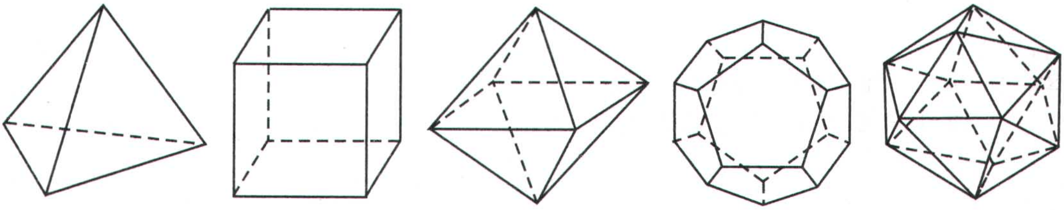
Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p \,;\, q\}$.

Từ định nghĩa trên ta thấy các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều bằng nhau.

Người ta chứng minh được định lí sau :

> ***Định lí***
>
> *Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại {3; 3}, loại {4; 3}, loại {3; 4}, loại {5; 3} và loại {3; 5}.*

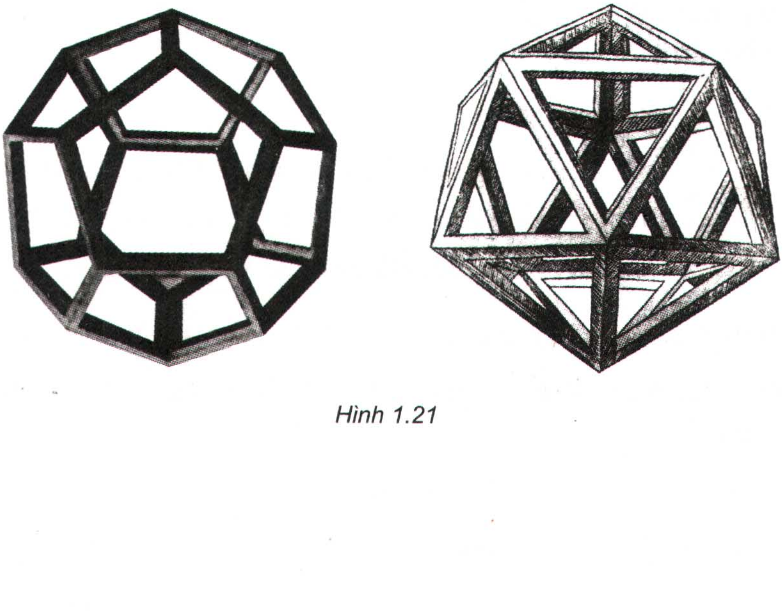
Tuỳ theo số mặt của chúng, năm loại khối đa diện đều kể trên theo thứ tự được gọi là các khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều (hay khối tám mặt đều), khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều (h.1.20).



Hình 1.20

2 Đếm số đỉnh, số cạnh của khối bát diện đều.

Các hình đa diện đều là những hình có vẻ đẹp cân đối, hài hoà. Các nhà toán học cổ đại xem chúng là những hình lí tưởng. Vẻ đẹp của chúng cũng làm nhiều hoạ sĩ quan tâm. Lê-ô-na-đô Đa Vin-xi (Leonardo da Vinci) hoạ sĩ thiên tài người I-ta-li-a đã từng vẽ khá nhiều hình đa diện trong đó có các hình đa diện đều. Dưới đây là hình mười hai mặt đều và hình hai mươi mặt đều do ông vẽ (h.1.21).



Hình 1.21

Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
$\{3 ; 3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4 ; 3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3 ; 4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5 ; 3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3 ; 5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20

Ví dụ

Chứng minh rằng :

a) Trung điểm các cạnh của một tứ diện đều là các đỉnh của một hình bát diện đều.

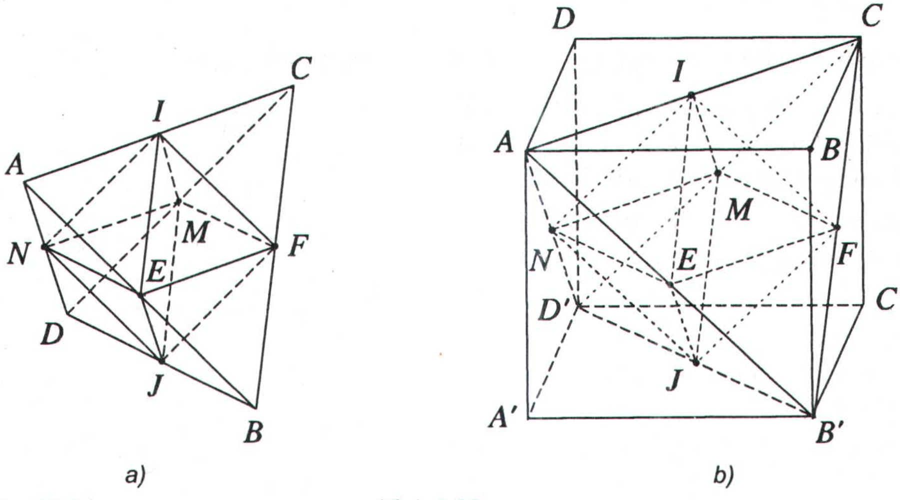
b) Tâm các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình bát diện đều.

Giải

a) Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh bằng a. Gọi I, J, E, F, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, BC, CD và DA (h.1.22a).

3 Chứng minh rằng tám tam giác IEF, IFM, IMN, INE, JEF, JFM, JMN và JNE là những tam giác đều cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Tám tam giác đều nói trên tạo thành một đa diện có các đỉnh là I, J, E, F, M, N mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng bốn tam giác đều. Do đó đa diện ấy là đa diện đều loại $\{3 ; 4\}$, tức là hình bát diện đều.



a)

b)

Hình 1.22

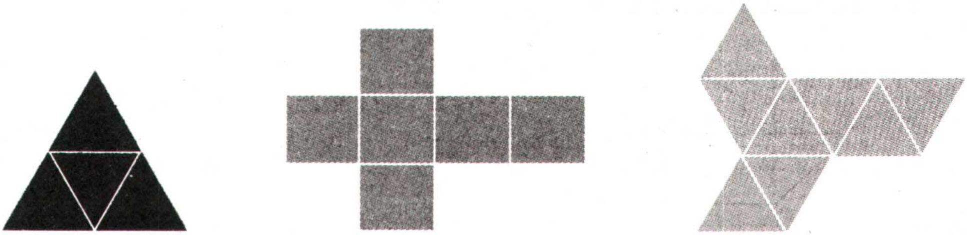
b) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (h.1.22b).

4 Chứng minh rằng $AB'CD'$ là một tứ diện đều. Tính các cạnh của nó theo a.

Gọi I, J, E, F, M và N lần lượt là tâm của các mặt $ABCD$, $A'B'C'D'$, $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ và $DAA'D'$ của hình lập phương. Để ý rằng sáu điểm trên cũng lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, $B'D'$, AB', $B'C$, CD' và $D'A$ của tứ diện đều $AB'CD'$ nên theo câu a) sáu điểm đó là các đỉnh của hình bát diện đều.

BÀI TẬP

1. Cắt bìa theo mẫu dưới đây (h.1.23), gấp theo đường kẻ, rồi dán các mép lại để được các hình tứ diện đều, hình lập phương và hình bát diện đều.



Hình 1.23

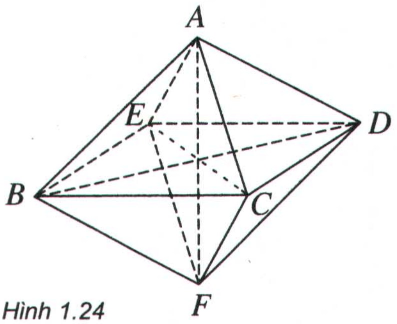
2. Cho hình lập phương (H). Gọi (H') là hình bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của (H). Tính tỉ số diện tích toàn phần của (H) và (H').

3. Chứng minh rằng tâm của các mặt của hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

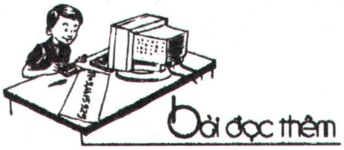
4. Cho hình bát diện đều $ABCDEF$ (h.1.24). Chứng minh rằng :

   a) Các đoạn thẳng AF, BD và CE đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

   b) $ABFD$, $AEFC$ và $BCDE$ là những hình vuông.



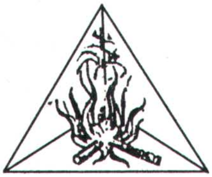
Hình 1.24



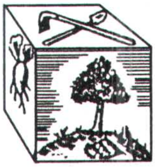
Bài đọc thêm

Hình đa diện đều

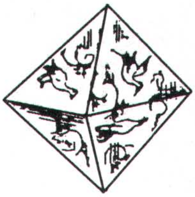
Câu chuyện về các hình đa diện đều mang nhiều tính huyền thoại. Người ta không biết được ai là người đầu tiên đã tìm ra chúng. Trong một cuộc khai quật người ta đã tìm thấy một thứ đồ chơi của trẻ con hình hai mươi mặt đều có niên đại cách chúng ta khoảng 2500 năm. Các nhà toán học cổ đại Hi Lạp thuộc trường phái Pla-tông và trước đó nữa là trường phái Py-ta-go (thế kỉ IV trước Công nguyên) đã từng nghiên cứu về các hình đa diện nói chung và các hình đa diện đều nói riêng. Các nhà toán học thời bấy giờ coi năm loại hình đa diện đều là những hình lí tưởng. Người ta coi bốn loại đa diện đều dễ dựng là tứ diện, hình lập phương, hình bát diện đều và hình hai mươi mặt đều, theo thứ tự tượng trưng cho lửa, đất, không khí và nước, đó là bốn yếu tố cơ bản (theo quan niệm của thời bấy giờ) tạo nên mọi vật. Còn hình mười hai mặt đều tượng trưng cho toàn thể vũ trụ.



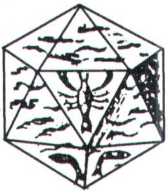
Lửa



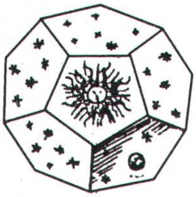
Đất



Không khí



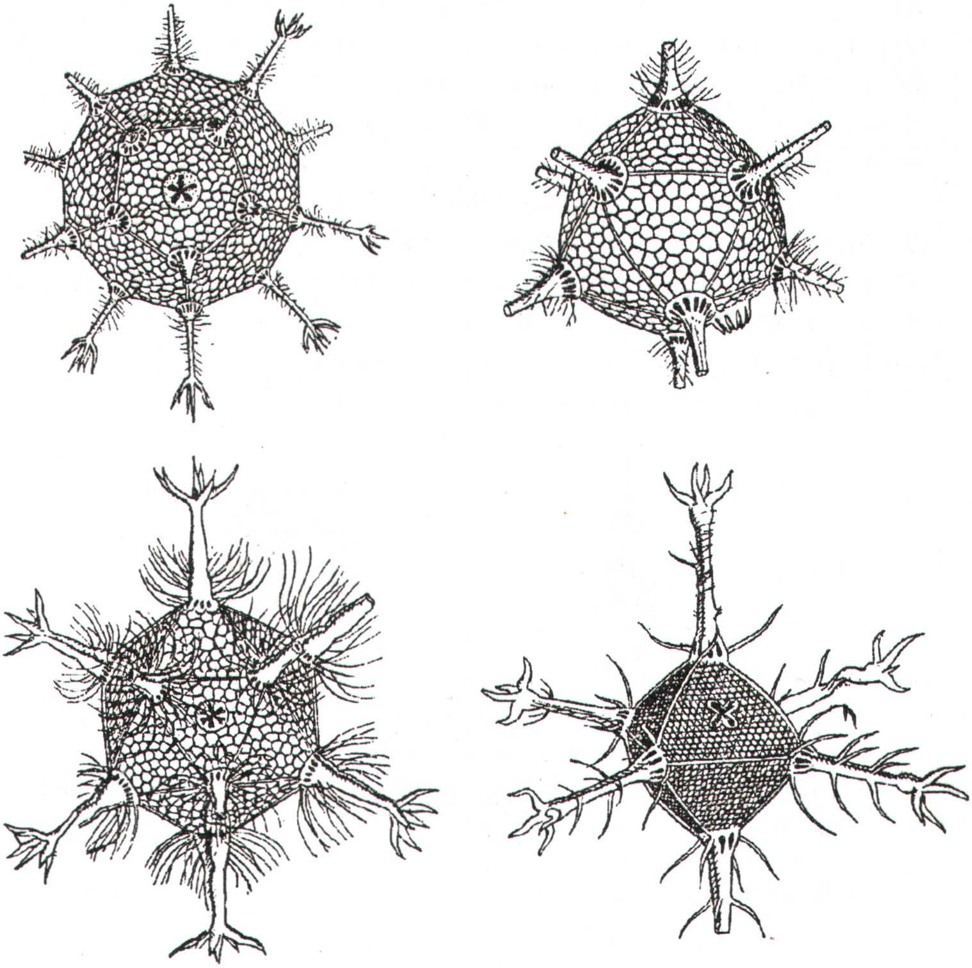
Nước



Vũ trụ

Sau này người ta còn tìm thấy các hình đa diện đều xuất hiện trong tự nhiên dưới dạng tinh thể của nhiều hợp chất. Chẳng hạn tinh thể của các chất sodium sulphantimoniate, muối ăn, chrome alum có dạng tương ứng là khối tứ diện, khối lập phương, khối bát diện đều. Còn hai loại hình đa diện đều phức tạp hơn là hình mười hai mặt đều và hình hai mươi mặt đều, xuất hiện trong khung xương của một số vi sinh vật biển ví dụ : circogonia icosahedra và circorrhegma dodecahedra.

Các hình đa diện đều là những hình có tâm, trục hoặc mặt phẳng đối xứng. Việc nghiên cứu các phép biến hình biến mỗi hình đa diện đều thành chính nó đã đặt nền móng cho lí thuyết về các nhóm hữu hạn, một hướng nghiên cứu quan trọng của đại số. Lí thuyết này có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu các dạng tinh thể của các hợp chất hoá học.



Một số vi sinh vật biển

§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích của một khối đa diện hiểu theo nghĩa thông thường là số đo độ lớn phần không gian mà nó chiếm chỗ. Từ xa xưa con người đã tìm cách đo thể tích của các khối vật chất trong tự nhiên. Đối với những vật thể lỏng, như khối nước trong một cái bể chứa, người ta có thể dùng những cái thùng có kích thước nhỏ hơn để đong. Đối với những vật rắn có kích thước nhỏ người ta có thể thả chúng vào một cái thùng đổ đầy nước rồi đo lượng nước trào ra... Tuy nhiên trong thực tế có nhiều vật thể không thể đo được bằng những cách trên. Chẳng hạn để đo thể tích của kim tự tháp Ai Cập ta không thể nhúng nó vào nước hay chia nhỏ nó ra được. Vì vậy người ta tìm cách thiết lập những công thức tính thể tích của một số khối đa diện đơn giản khi biết kích thước của chúng, rồi từ đó tìm cách tính thể tích của các khối đa diện phức tạp hơn.

I- KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Người ta chứng minh được rằng : có thể đặt tương ứng cho mỗi khối đa diện (H) một số dương $V_{(H)}$ thoả mãn các tính chất sau :

a) Nếu (H) là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì $V_{(H)} = 1$.

b) Nếu hai khối đa diện (H_1) và (H_2) bằng nhau thì $V_{(H_1)} = V_{(H_2)}$.

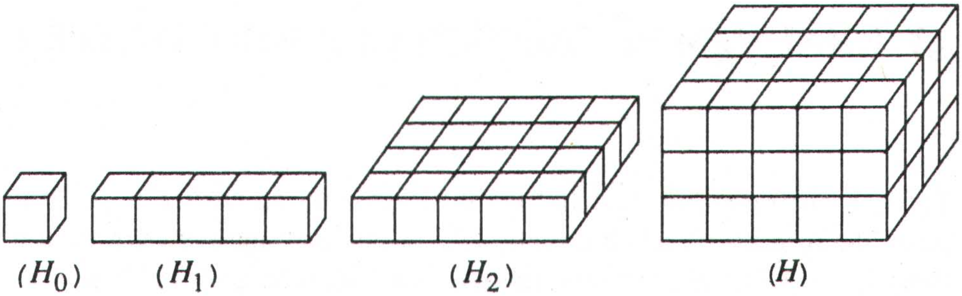
c) Nếu khối đa diện (H) được phân chia thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) thì : $V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)}$.

Số dương $V_{(H)}$ nói trên được gọi *là thể tích* của khối đa diện (H). Số đó cũng được gọi là thể tích của hình đa diện giới hạn khối đa diện (H).

Khối lập phương có cạnh bằng 1 được gọi là *khối lập phương đơn vị*.

Bây giờ ta sẽ xét thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c.

Ví dụ. Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước là những số nguyên dương.



Hình 1.25

Gọi (H_0) là khối lập phương đơn vị.

– Gọi (H_1) là khối hộp chữ nhật có ba kích thước $a = 5$, $b = 1$, $c = 1$.

△1 Có thể chia (H_1) thành bao nhiêu khối lập phương bằng (H_0) ?

Khi đó ta có $V_{(H_1)} = 5.V_{(H_0)} = 5$.

– Gọi (H_2) là khối hộp chữ nhật có ba kích thước $a = 5$, $b = 4$, $c = 1$.

△2 Có thể chia (H_2) thành bao nhiêu khối hộp chữ nhật bằng (H_1)?

Khi đó ta có $V_{(H_2)} = 4.V_{(H_1)} = 4.5 = 20$.

– Gọi (H) là khối hộp chữ nhật có ba kích thước $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

△3 Có thể chia (H) thành bao nhiêu khối hộp chữ nhật bằng (H_2)?

Khi đó ta có $V_{(H)} = 3.V_{(H_2)} = 3.4.5 = 60$ (h.1.25).

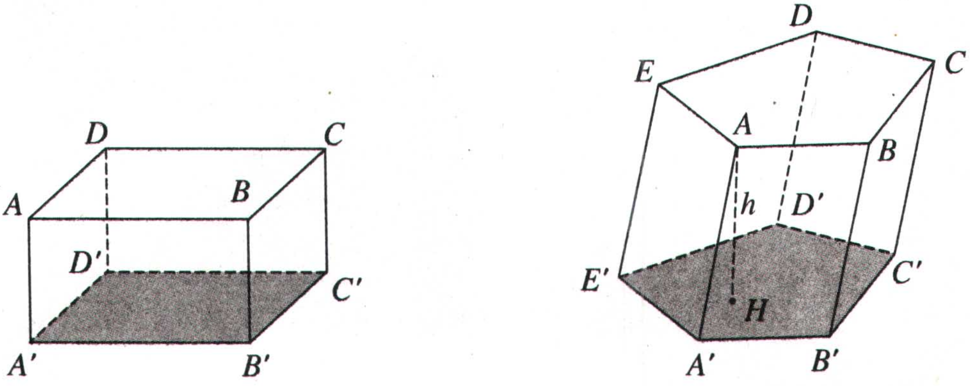
Lập luận tương tự như trên ta suy ra : thể tích của khối hộp chữ nhật (H) có ba kích thước là những số nguyên dương a, b, c là $V_{(H)} = abc$.

Người ta chứng minh được rằng công thức trên cũng đúng đối với hình hộp chữ nhật có ba kích thước là những số dương. Ta có định lí sau :

> **Định lí**
>
> *Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.*

II- THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Nếu ta xem khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như là khối lăng trụ có đáy là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ và đường cao AA' thì từ định lí trên suy ra thể tích của nó bằng diện tích đáy nhân với chiều cao. Ta có thể chứng minh được rằng điều đó cũng đúng đối với một khối lăng trụ bất kì (h.1.26).



Hình 1.26

> **Định lí**
>
> *Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là*
>
> $$V = Bh.$$

III- THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Đối với khối chóp người ta chứng minh được định lí sau :

> **Định lí**
>
> *Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là*
>
> $$V = \frac{1}{3}Bh.$$

Ta cũng gọi thể tích các khối đa diện, khối lăng trụ, khối chóp đã nói ở trên lần lượt là thể tích các hình đa diện, hình lăng trụ, hình chóp xác định chúng.

△4 Kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập (h.1.27) được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Hãy tính thể tích của nó.

Hình 1.27

Ví dụ

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và BB'. Đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E'. Đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F'. Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

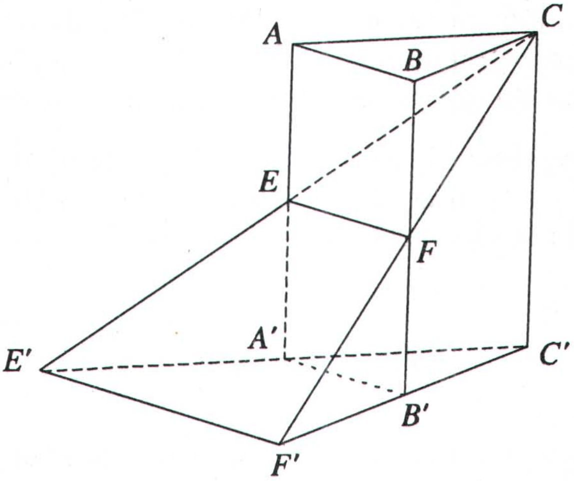
a) Tính thể tích khối chóp $C.ABFE$ theo V.

b) Gọi khối đa diện (H) là phần còn lại của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ sau khi cắt bỏ đi khối chóp $C.ABFE$. Tính tỉ số thể tích của (H) và của khối chóp $C.C'E'F'$.

Giải

a) Hình chóp $C.A'B'C'$ và hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy và đường cao bằng nhau nên $V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V$. Từ đó suy ra $V_{C.ABB'A'} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$.

Do EF là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ nên diện tích $ABFE$ bằng nửa diện tích $ABB'A'$. Do đó $V_{C.ABFE} = \frac{1}{2}V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{3}V$ (h.1.28).



Hình 1.28

b) Áp dụng câu a) ta có $V_{(H)} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABFE} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$.

Vì EA' song song và bằng $\frac{1}{2}CC'$ nên theo định lí Ta-lét, A' là trung điểm của $E'C'$. Tương tự, B' là trung điểm của $F'C'$. Do đó diện tích tam giác $C'E'F'$ gấp bốn lần diện tích tam giác $A'B'C'$. Từ đó suy ra $V_{C.E'F'C'} = 4V_{C.A'B'C'} = \frac{4}{3}V$.

Do đó $\dfrac{V_{(H)}}{V_{C.E'F'C'}} = \dfrac{1}{2}$.

BÀI TẬP

1. Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a.

2. Tính thể tích khối bát diện đều cạnh a.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tỉ số thể tích của khối hộp đó và thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

4. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Chứng minh rằng $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}$.

5. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện $CDEF$ theo a.

6. Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Đoạn thẳng AB có độ dài a trượt trên d, đoạn thẳng CD có độ dài b trượt trên d'. Chứng minh rằng khối tứ diện $ABCD$ có thể tích không đổi.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Các đỉnh, cạnh, mặt của một đa diện phải thoả mãn những tính chất nào ?

2. Tìm một hình tạo bởi các đa giác nhưng không phải là một đa diện.

3. Thế nào là một khối đa diện lồi ? Tìm ví dụ trong thực tế mô tả một khối đa diện lồi, một khối đa diện không lồi.

4. Cho hình lăng trụ và hình chóp có diện tích đáy và chiều cao bằng nhau. Tính tỉ số thể tích của chúng.

5. Cho hình chóp tam giác $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Hãy tính đường cao OH của hình chóp.

6. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh AB bằng a. Các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy một góc 60°. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA.

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.DBC$ và $S.ABC$.

b) Tính thể tích của khối chóp $S.DBC$.

7. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = 5a$, $BC = 6a$, $CA = 7a$. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích của khối chóp đó.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy và $AB = a$, $AD = b$, $SA = c$. Lấy các điểm B', D' theo thứ tự thuộc SB, SD sao cho AB' vuông góc với SB, AD' vuông góc với SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60°. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích khối chóp $S.AEMF$.

10. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tính thể tích khối tứ diện $A'BB'C$.

b) Mặt phẳng đi qua $A'B'$ và trọng tâm tam giác ABC, cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Tính thể tích hình chóp $C.A'B'FE$.

11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BB' và DD'. Mặt phẳng (CEF) chia khối hộp trên làm hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó.

12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là trung điểm $A'B'$, N là trung điểm BC.

a) Tính thể tích khối tứ diện $ADMN$.

b) Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A, (H') là khối đa diện còn lại.

Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

(A) Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau ;

(B) Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau ;

(C) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh ;

(D) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và mặt bằng nhau.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

Số các đỉnh hoặc các mặt của bất kì hình đa diện nào cũng :

(A) Lớn hơn hoặc bằng 4 ; (B) Lớn hơn 4 ;

(C) Lớn hơn hoặc bằng 5 ; (D) Lớn hơn 5.

3. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

Số các cạnh của hình đa diện luôn luôn :

(A) Lớn hơn hoặc bằng 6 ; (B) Lớn hơn 6 ;

(C) Lớn hơn 7 ; (D) Lớn hơn hoặc bằng 8.

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Khối tứ diện là khối đa diện lồi ;

(B) Khối hộp là khối đa diện lồi ;

(C) Lắp ghép hai khối hộp sẽ được một khối đa diện lồi ;

(D) Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

(B) Hai khối chóp cụt có diện tích một đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

(C) Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

(D) Hai khối chóp cụt có diện tích hai đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

6. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A' và B' lần lượt là trung điểm của SA và SB. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C$ và $S.ABC$ bằng :

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{8}$.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$ bằng :

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{8}$; (D) $\frac{1}{16}$.

8. Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là :

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$; (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng :

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{6}$.

10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi O là giao điểm của AC và BD.

Tỉ số thể tích của khối chóp $O.A'B'C'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng :

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{6}$.

CHƯƠNG II

MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

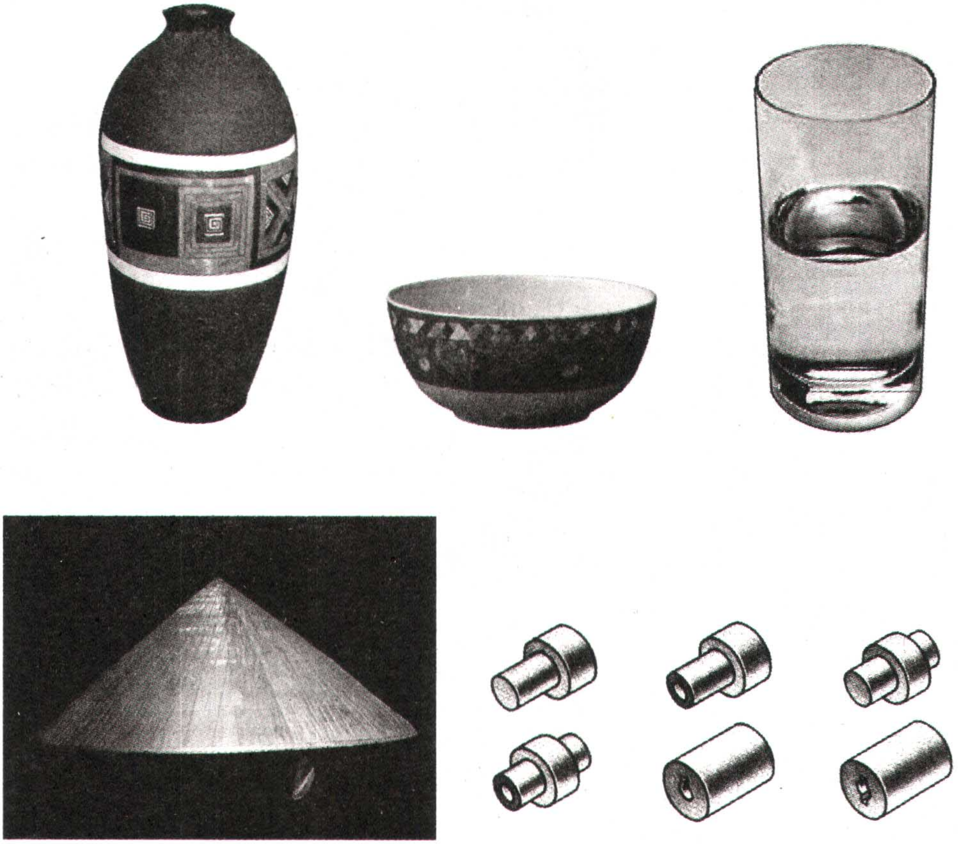
- Mặt tròn xoay
- Mặt nón tròn xoay, mặt trụ tròn xoay
- Mặt cầu

Làm đồ gốm trên bàn xoay

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

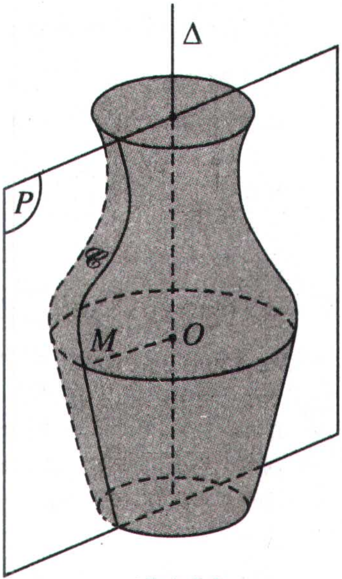
I- SỰ TẠO THÀNH MẶT TRÒN XOAY

Xung quanh chúng ta có nhiều vật thể có hình dạng là những mặt tròn xoay như bình hoa, nón lá, cái bát (chén) ăn cơm, cái cốc (li) uống nước, một số chi tiết máy (h.2.1)… Nhờ có bàn xoay với sự khéo léo của đôi bàn tay, người thợ gốm có thể tạo nên những vật dụng có dạng tròn xoay bằng đất sét. Dựa vào sự quay tròn của trục máy tiện, người thợ cơ khí có thể tạo nên những chi tiết máy bằng kim loại có dạng tròn xoay. Vậy các mặt tròn xoay được hình thành như thế nào ? Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu những tính chất hình học của mặt tròn xoay.



Hình 2.1

Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và một đường $\mathscr{C}$. Khi quay mặt phẳng (P) quanh Δ một góc 360° thì mỗi điểm M trên đường $\mathscr{C}$ vạch ra một đường tròn có tâm O thuộc Δ và nằm trên mặt phẳng vuông góc với Δ. Như vậy khi quay mặt phẳng (P) quanh đường thẳng Δ thì đường $\mathscr{C}$ sẽ tạo nên một hình được gọi là *mặt tròn xoay* (h.2.2).



Hình 2.2

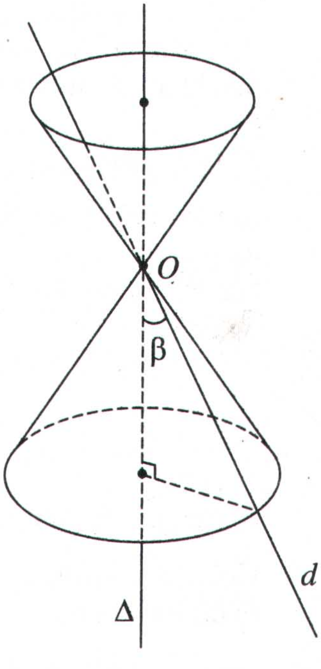
Đường $\mathscr{C}$ được gọi là *đường sinh* của mặt tròn xoay đó. Đường thẳng Δ được gọi là *trục* của mặt tròn xoay.

△1 Hãy nêu tên một số đồ vật có hình dạng là các mặt tròn xoay.

II- MẶT NÓN TRÒN XOAY

1. Định nghĩa

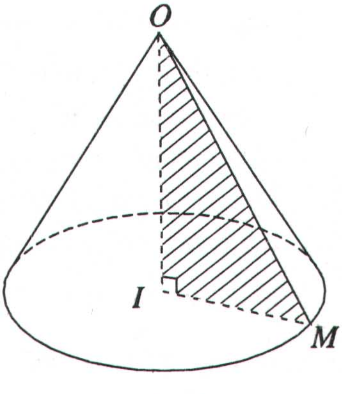
> *Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo thành góc β với $0^{\circ} < \beta < 90^{\circ}$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O. Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón đó (h.2.3).*



Hình 2.3

2. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay

a) Cho tam giác OIM vuông tại I (h.2.4). Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là *hình nón tròn xoay*, gọi tắt là *hình nón*.



Hình 2.4

Hình tròn tâm I sinh bởi các điểm thuộc cạnh IM khi IM quay quanh trục OI được gọi là *mặt đáy* của hình nón, điểm O gọi là *đỉnh* của hình nón. Độ dài đoạn OI gọi là *chiều cao* của hình nón, đó cũng là khoảng cách từ O đến mặt phẳng đáy. Độ dài đoạn OM gọi là độ dài *đường sinh* của hình nón. Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh trục OI gọi là *mặt xung quanh* của hình nón đó.

b) *Khối nón tròn xoay* là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Người ta còn gọi tắt khối nón tròn xoay là *khối nón*. Những điểm không thuộc khối nón được gọi là những *điểm ngoài* của khối nón. Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón ứng với khối nón ấy được gọi là những *điểm trong* của khối nón. Ta gọi đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón theo thứ tự là *đỉnh, mặt đáy, đường sinh* của khối nón tương ứng.

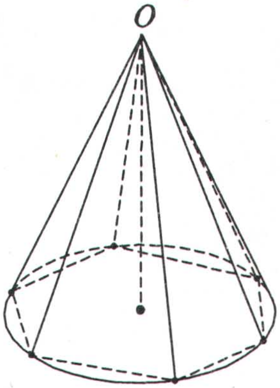
3. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay

a) Một hình chóp được gọi là *nội tiếp* một hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đường tròn đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón. Khi đó ta còn nói hình nón *ngoại tiếp* hình chóp. Ta có định nghĩa sau :

> *Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

b) Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón

Gọi p là chu vi đáy của hình chóp đều nội tiếp hình nón và q là khoảng cách từ đỉnh O tới một cạnh đáy của hình chóp đều đó thì diện tích xung quanh của hình chóp đều là $S_{xq} = \frac{1}{2}pq$. (h.2.5)



Hình 2.5

Khi cho số cạnh đáy của hình chóp đều tăng lên vô hạn thì p có giới hạn là độ dài đường tròn đáy bán kính r của hình nón, q có giới hạn là độ dài đường sinh l của hình nón. Khi đó ta tính được diện tích xung quanh của hình nón theo công thức :

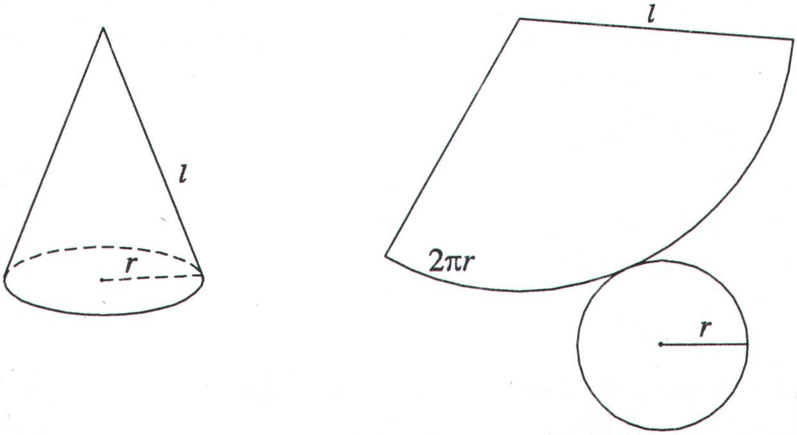
$$\boxed{S_{xq} = \pi rl}$$

Vậy : *Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay bằng một nửa tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.*

☞ ***Chú ý.*** Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay cũng là diện tích xung quanh của khối nón được giới hạn bởi hình nón đó.

Người ta gọi tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là *diện tích toàn phần* của hình nón.

Nếu cắt mặt xung quanh của hình nón tròn xoay theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta sẽ được một hình quạt có bán kính bằng độ dài đường sinh của hình nón và một cung tròn có độ dài bằng chu vi đường tròn đáy của hình nón. Ta có thể xem diện tích hình quạt này là diện tích xung quanh của hình nón. (h.2.6)



Hình 2.6

4. Thể tích khối nón tròn xoay

a) Muốn tính thể tích khối nón tròn xoay ta dựa vào định nghĩa sau đây:

> *Thể tích của khối nón tròn xoay là giới hạn của thể tích khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

b) Công thức tính thể tích khối nón tròn xoay

Ta biết rằng thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ tích của diện tích đa giác đáy và chiều cao của khối chóp đó (chiều cao này cũng là chiều cao của khối nón). Khi cho số cạnh đáy của khối chóp đều tăng lên vô hạn thì diện tích đa giác đáy của khối chóp đều đó có giới hạn là diện tích hình tròn đáy của khối nón tròn xoay. Do đó ta tính được thể tích của khối nón tròn xoay như sau :

Gọi V là thể tích của khối nón tròn xoay có diện tích đáy B và chiều cao h, ta có công thức :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Bh}$$

Như vậy, nếu bán kính đáy bằng r thì $B = \pi r^2$, khi đó : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

5. Ví dụ

Trong không gian cho tam giác vuông OIM vuông tại I, góc $\widehat{IOM} = 30^{\circ}$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay đó.

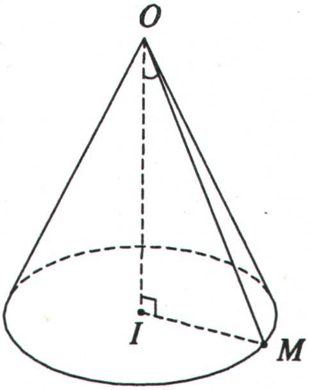
b) Tính thể tích của khối nón tròn xoay được tạo nên bởi hình nón tròn xoay nói trên.

Giải

a) Hình nón tròn xoay được tạo nên có bán kính đáy là a và có độ dài đường sinh $OM = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là :

$S_{xq} = \pi r l = \pi a.2a = 2\pi a^2$ (h.2.7).



Hình 2.7

b) Khối nón tròn xoay có chiều cao $h = OI = a\sqrt{3}$ và có diện tích hình tròn đáy là πa^2. Vậy khối nón tròn xoay có thể tích là :

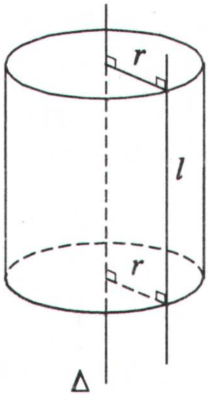
$$V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$

△2 Cắt mặt xung quanh của một hình nón tròn xoay dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được một nửa hình tròn bán kính *R*. Hỏi hình nón đó có bán kính *r* của đường tròn đáy và góc ở đỉnh của hình nón bằng bao nhiêu ?

III- MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Định nghĩa

> *Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay. Người ta thường gọi tắt mặt trụ tròn xoay là mặt trụ. Đường thẳng Δ gọi là trục và đường thẳng l là đường sinh của mặt trụ đó (h.2.8).*

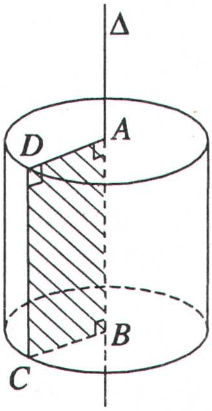


Hình 2.8

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

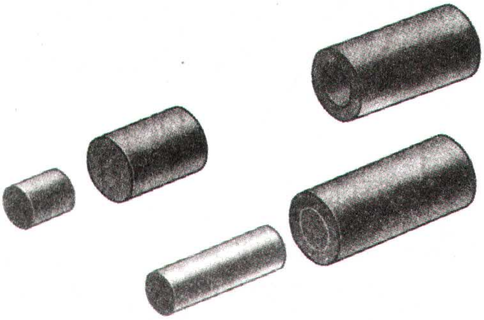
a) Ta hãy xét hình chữ nhật *ABCD*. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh *AB*, thì đường gấp khúc *ADCB* tạo thành một hình được gọi là *hình trụ tròn xoay* hay còn được gọi tắt là *hình trụ* (h.2.9).

Khi quay quanh *AB*, hai cạnh *AD* và *BC* sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là *hai đáy* của hình trụ. Độ dài đoạn *CD* gọi là độ dài *đường sinh* của hình trụ, phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh *CD* khi quay quanh *AB* gọi là *mặt xung quanh* của hình trụ. Khoảng cách *AB* giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là *chiều cao của hình trụ*.



Hình 2.9

b) *Khối trụ tròn xoay* là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó. Khối trụ tròn xoay còn được gọi tắt là *khối trụ*. Những điểm không thuộc khối trụ được gọi là những *điểm ngoài* của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ gọi là những *điểm trong* của khối trụ. Ta gọi mặt đáy, chiều cao, đường sinh của một hình trụ theo thứ tự là *mặt đáy, chiều cao, đường sinh* của khối trụ tương ứng.



Các chi tiết máy có dạng hình trụ

3. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay

a) Một hình lăng trụ gọi là *nội tiếp* một hình trụ nếu hai đáy của hình lăng trụ nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ. Khi đó ta còn nói hình trụ *ngoại tiếp* hình lăng trụ. Ta có định nghĩa sau :

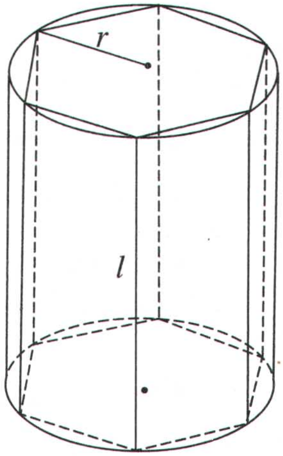
> *Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

b) *Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ*

Gọi p là chu vi đáy của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ và h là chiều cao của hình lăng trụ đó thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều là : $S_{xq} = ph$ (h.2.10).

Khi cho số cạnh đáy của hình lăng trụ đều tăng lên vô hạn thì p có giới hạn là chu vi hình tròn đáy bán kính r của hình trụ, chiều cao h bằng độ dài đường sinh l của hình trụ. Khi đó ta tính được diện tích xung quanh của hình trụ theo công thức :

$$\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$$



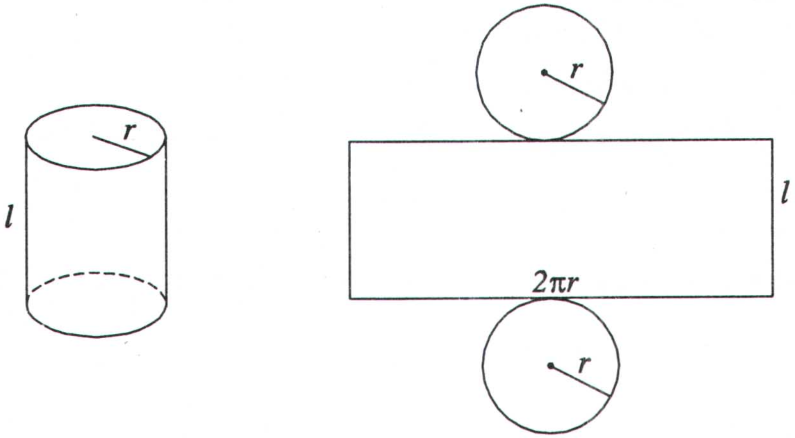
Hình 2.10

Vậy : *Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay bằng tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.*

☞ ***Chú ý.*** Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay cũng là diện tích xung quanh của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đó.

Người ta gọi tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai đáy là *diện tích toàn phần* của hình trụ.

Nếu cắt mặt xung quanh của hình trụ theo một đường sinh, rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta sẽ được một hình chữ nhật có một cạnh bằng đường sinh l và một cạnh bằng chu vi của đường tròn đáy. Độ dài đường sinh l bằng chiều cao h của hình trụ. Khi đó diện tích hình chữ nhật bằng diện tích xung quanh của hình trụ. (h.2.11)



Hình 2.11

4. Thể tích khối trụ tròn xoay

a) Muốn tính thể tích khối trụ tròn xoay ta dựa vào định nghĩa sau đây :

> *Thể tích của khối trụ tròn xoay là giới hạn của thể tích khối lăng trụ đều nội tiếp khối trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

b) *Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay*

Ta biết rằng thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích đa giác đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó. Khi cho số cạnh đáy của khối lăng trụ đều tăng lên vô hạn thì diện tích của đa giác đáy của khối lăng trụ đều có giới hạn là diện tích của hình tròn đáy của khối trụ tròn xoay. Do đó ta tính được thể tích của khối trụ tròn xoay như sau :

Gọi V là thể tích của khối trụ tròn xoay có diện tích đáy B và chiều cao h, ta có công thức :

$$\boxed{V = Bh}$$

Như vậy, nếu bán kính đáy bằng r thì $B = \pi r^2$, khi đó : $V = \pi r^2 h$.

△3 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

5. *Ví dụ*

Trong không gian cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay đó.

b) Tính thể tích của khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ nói trên.

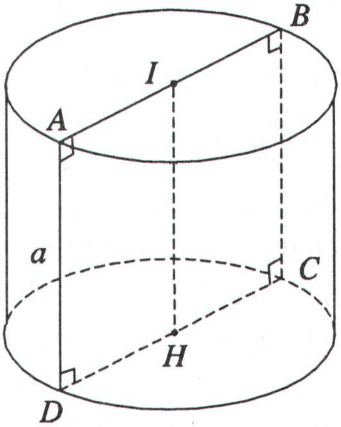
Giải

a) Hình trụ tròn xoay có bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$ và đường sinh $l = a$. Do đó diện tích xung quanh của hình trụ là :

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2 \text{ (h.2.12).}$$

b) Thể tích của khối trụ tròn xoay được tính theo công thức :

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 .a = \frac{1}{4}\pi a^3 .$$



Hình 2.12

BÀI TẬP

1. Cho đường tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P). Từ những điểm M thuộc đường tròn này ta kẻ những đường thẳng vuông góc với (P). Chứng minh rằng những đường thẳng như vậy nằm trên một mặt trụ tròn xoay. Hãy xác định trục và bán kính của mặt trụ đó.

2. Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy gọi tên các hình tròn xoay hoặc khối tròn xoay sinh ra bởi :

a) Ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư.

b) Ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của nó.

c) Một tam giác vuông kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

d) Một hình chữ nhật kể cả các điểm trong của hình chữ nhật đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

3. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

b) Tính thể tích của khối nón được tạo thành bởi hình nón đó.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích thiết diện đó.

4. Trong không gian cho hai điểm A, B cố định và có độ dài $AB = 20$ cm. Gọi d là một đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua A và cách B một khoảng cách bằng 10 cm. Chứng tỏ rằng đường thẳng d luôn luôn nằm trên một mặt nón, hãy xác định trục và góc ở đỉnh của mặt nón đó.

5. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm và có khoảng cách giữa hai đáy bằng 7 cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

6. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.

7. Một hình trụ có bán kính r và chiều cao $h = r\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho.

c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng 30°. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

8. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O\,;r)$ và $(O'\,;r)$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn $(O\,;r)$.

a) Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diện tích xung quanh của hình nón, hãy tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, hãy tính tỉ số thể tích hai phần đó.

9. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón góc 60°. Tính diện tích tam giác SBC.

10. Cho hình trụ có bán kính r và có chiều cao cũng bằng r. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC và AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tính diện tích của hình vuông đó và côsin của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.

§2. MẶT CẦU

VOLLEY BALL
GERU STAR
NGÔI SAO
OFFICIAL
SIZE & WEIGHT

Hình 2.13

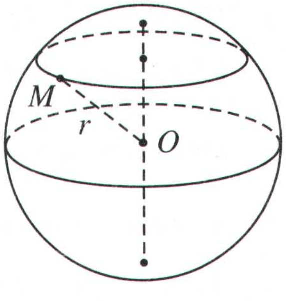
Trong đời sống hằng ngày chúng ta thường thấy hình ảnh của mặt cầu thông qua hình ảnh bề mặt của quả bóng bàn, của viên bi, của mô hình quả địa cầu, của quả bóng chuyền (h.2.13), v.v... Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu, nghiên cứu những tính chất hình học của mặt cầu.

I- MẶT CẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

1. Mặt cầu

> *Tập hợp những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r (r > 0) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính r (h.2.14).*

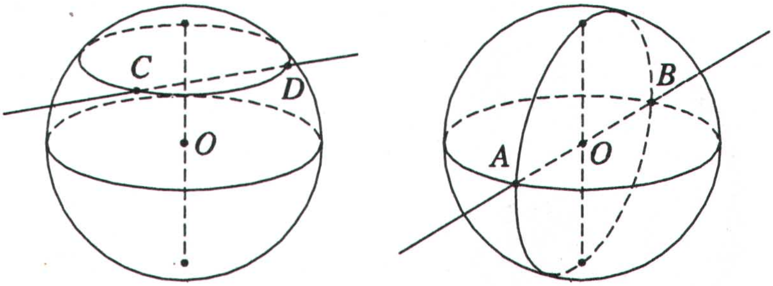
Người ta thường kí hiệu mặt cầu tâm O bán kính r là $S(O\,;\,r)$ hay viết tắt là (S). Như vậy ta có mặt cầu $S(O\,;\,r)=\{M \mid OM=r\}$.



Hình 2.14

– Nếu hai điểm C, D nằm trên mặt cầu $S(O\,;\,r)$ thì đoạn thẳng CD (h.2.15a) được gọi là *dây cung* của mặt cầu đó.

– Dây cung *AB* đi qua tâm *O* được gọi là một *đường kính* của mặt cầu. Khi đó độ dài đường kính bằng $2r$ (h.2.15b).



a) b)

Hình 2.15

Một mặt cầu được xác định nếu biết tâm và bán kính của nó hoặc biết một đường kính của mặt cầu đó.

2. Điểm nằm trong và nằm ngoài mặt cầu. Khối cầu

Cho mặt cầu tâm *O* bán kính *r* và *A* là một điểm bất kì trong không gian.

– Nếu $OA = r$ thì ta nói điểm *A nằm trên* mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

– Nếu $OA < r$ thì ta nói điểm *A nằm trong* mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

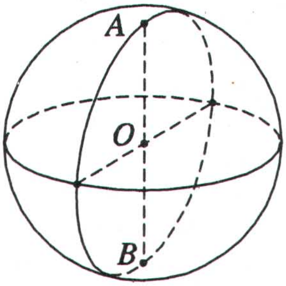
– Nếu $OA > r$ thì ta nói điểm *A nằm ngoài* mặt cầu $S(O\ ;\ r)$.

> *Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu S(O ; r) cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O bán kính r.*

3. Biểu diễn mặt cầu

Người ta thường dùng phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng để biểu diễn mặt cầu. Khi đó hình biểu diễn của mặt cầu là một hình tròn.

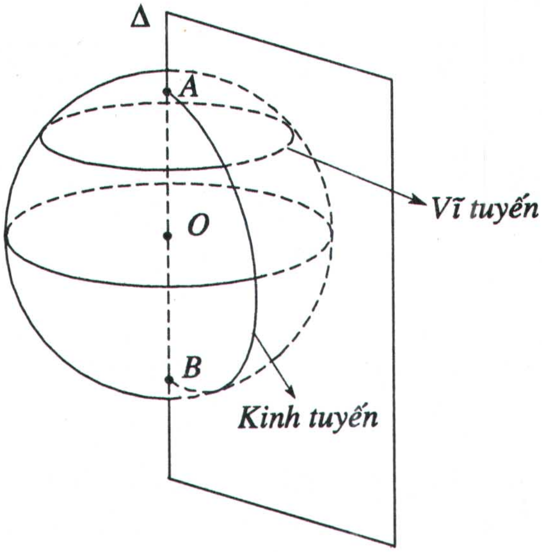
Muốn cho hình biểu diễn của mặt cầu được trực quan người ta thường vẽ thêm hình biểu diễn của một số đường tròn nằm trên mặt cầu đó (h.2.16).



Hình 2.16

4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu

Ta có thể xem mặt cầu như là mặt tròn xoay được tạo nên bởi một nửa đường tròn quay quanh trục chứa đường kính của nửa đường tròn đó. Khi đó giao tuyến của mặt cầu với các nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là *kinh tuyến* của mặt cầu, giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là *vĩ tuyến* của mặt cầu. Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai *cực* của mặt cầu (h.2.17).



Hình 2.17

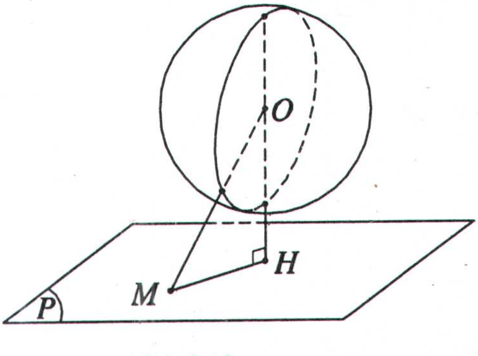
△1 Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn đi qua hai điểm cố định *A* và *B* cho trước.

II- GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu $S(O\,;\,r)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P). Khi đó $h = OH$ là khoảng cách từ O tới mặt phẳng (P). Ta có ba trường hợp sau :

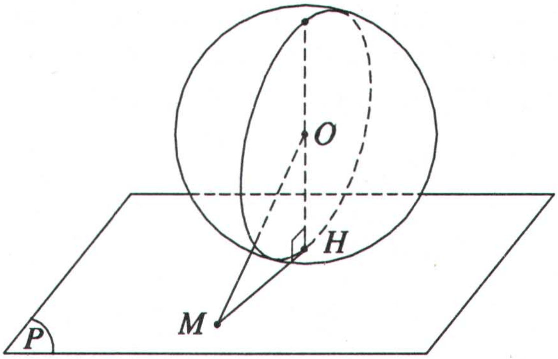
1. Trường hợp h > r

Nếu M là một điểm bất kì trên mặt phẳng (P) thì $OM \geq OH$. Từ đó suy ra $OM > r$. Vậy mọi điểm M thuộc mặt phẳng (P) đều nằm ngoài mặt cầu. Do đó *mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu* (h.2.18).



Hình 2.18

2. Trường hợp h = r



Hình 2.19

Trong trường hợp này điểm H thuộc mặt cầu $S(O\ ;\ r)$. Khi đó với mọi điểm M thuộc mặt phẳng (P) nhưng khác với H ta luôn luôn có :

$$OM > OH = r \text{ nên } OM > r.$$

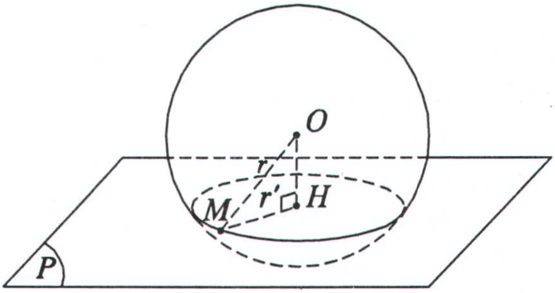
Như vậy H là điểm chung duy nhất của mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và mặt phẳng (P). Khi đó ta nói *mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu* $S(O\ ;\ r)$ tại H (h.2.19).

Điểm H gọi là *tiếp điểm* của mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và mặt phẳng (P), mặt phẳng (P) gọi là *tiếp diện* của mặt cầu. Vậy ta có :

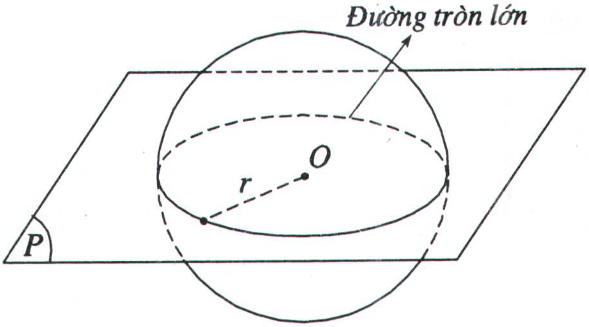
> *Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu S(O ; r) tại điểm H là (P) vuông góc với bán kính OH tại điểm H đó.*

3. Trường hợp h < r

Trong trường hợp này *mặt phẳng cắt mặt cầu* theo đường tròn tâm H, bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$ (h.2.20).



Hình 2.20



Hình 2.21

Thật vậy, gọi M là một điểm thuộc giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt cầu $S(O\ ;\ r)$. Xét tam giác vuông OMH ta có $MH = \sqrt{r^2 - h^2}$, do đó M thuộc đường tròn tâm H nằm trong mặt phẳng (P) và có bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$.

Đặc biệt khi $h = 0$ thì tâm O của mặt cầu thuộc mặt phẳng (P). Ta có giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ là đường tròn tâm O bán kính r. Đường tròn này được gọi là *đường tròn lớn* (h.2.21)

Mặt phẳng đi qua tâm O của mặt cầu gọi là *mặt phẳng kính* của mặt cầu đó.

2 a) Hãy xác định đường tròn giao tuyến của mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và mặt phẳng (α) biết rằng khoảng cách từ tâm O đến (α) bằng $\frac{r}{2}$.

b) Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$, hai mặt phẳng (α) và (β) có khoảng cách đến tâm O của mặt cầu đã cho lần lượt là a và b $(0 < a < b < r)$. Hãy so sánh hai bán kính của các đường tròn giao tuyến.

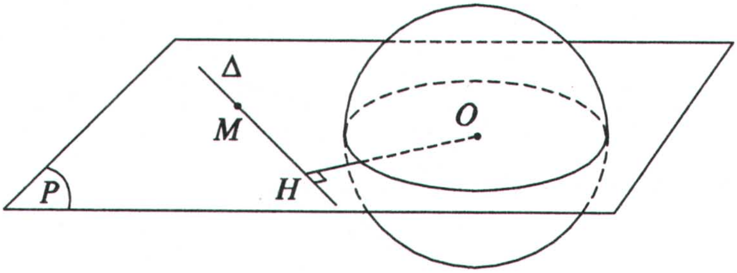
III- GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG. TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và đường thẳng Δ.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm O trên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O tới Δ.

Tương tự như trong trường hợp mặt cầu và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau đây :

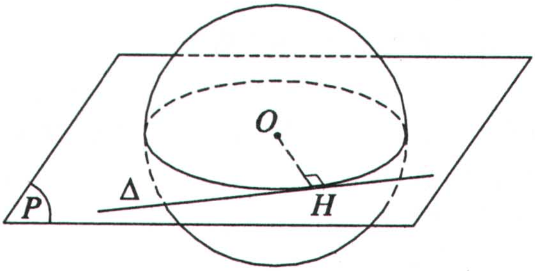
1. Nếu $d > r$ thì Δ không cắt mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ (h.2.22), vì với mọi điểm M thuộc Δ ta đều có $OM > r$ và như vậy mọi điểm M thuộc Δ đều nằm ngoài mặt cầu.



Hình 2.22

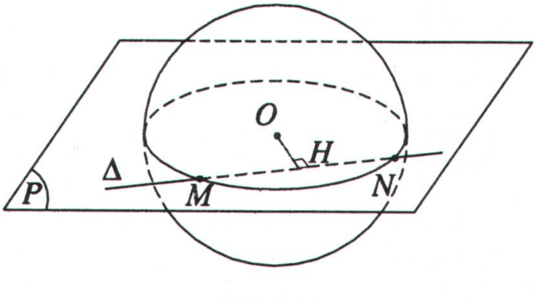
2. Nếu $d = r$ thì điểm H thuộc mặt cầu $S(O\ ;\ r)$. Khi đó với mọi điểm M thuộc Δ nhưng khác với H ta luôn luôn có $OM > OH = r$ nên $OM > r$. Như vậy H là điểm chung duy nhất của mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và đường thẳng Δ. Khi đó ta nói đường thẳng Δ *tiếp xúc* với mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tại H. Điểm H gọi là *điểm tiếp xúc* (hoặc tiếp điểm) của Δ và mặt cầu. Đường thẳng Δ gọi là *tiếp tuyến* của mặt cầu. Vậy ta có :

> *Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H đó (h.2.23).*



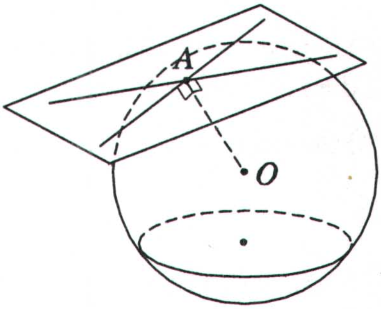
Hình 2.23

3. Nếu $d < r$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tại hai điểm M, N phân biệt. Hai điểm đó chính là giao điểm của đường thẳng Δ với đường tròn giao tuyến của mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ và mặt phẳng $(O,\ \Delta)$ (h.2.24).



Hình 2.24

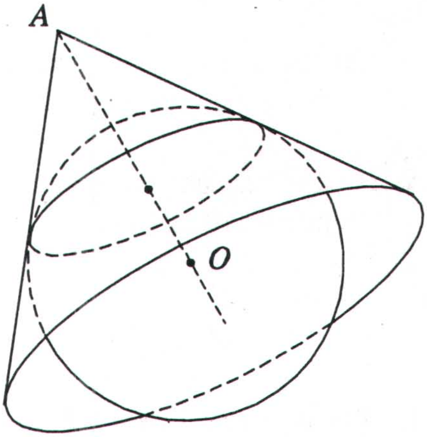
Đặc biệt, khi $d = 0$ thì đường thẳng Δ đi qua tâm O và cắt mặt cầu tại hai điểm A, B. Khi đó AB là đường kính của mặt cầu (h.2.15b).



Hình 2.25

Nhận xét. Người ta chứng minh được rằng :

a) Qua một điểm A nằm trên mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu tại A và đều nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A đó (h.2.25).



Hình 2.26

b) Qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đã cho. Các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh A. Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A đến các tiếp điểm đều bằng nhau (h.2.26).

☞ ***Chú ý.*** Người ta nói *mặt cầu nội tiếp hình đa diện* nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện, còn nói *mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện* nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu.

Khi mặt cầu nội tiếp (ngoại tiếp) hình đa diện, người ta cũng nói hình đa diện *ngoại tiếp* (*nội tiếp*) mặt cầu.

△3 Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* có cạnh bằng *a*. Hãy xác định tâm và bán kính mặt cầu :

a) Đi qua 8 đỉnh của hình lập phương.

b) Tiếp xúc với 12 cạnh của hình lập phương.

c) Tiếp xúc với 6 mặt của hình lập phương.

IV- CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Dùng phương pháp giới hạn người ta chứng minh được các công thức về tính diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu như sau :

Mặt cầu bán kính r có diện tích là :

$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

Khối cầu bán kính r có thể tích là :

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

☞ ***Chú ý.***

a) Diện tích S của mặt cầu bán kính r bằng bốn lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.

b) Thể tích V của khối cầu bán kính r bằng thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính của khối cầu đó.

△4 Cho hình lập phương ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước. Hãy tính thể tích của hình lập phương đó.

BÀI TẬP

1. Tìm tập hợp tất cả các điểm M trong không gian luôn luôn nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông.

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Hãy xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

3. Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước.

4. Tìm tập hợp tâm những mặt cầu luôn cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.

5. Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ ta kẻ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D.

a) Chứng minh rằng $MA.MB = MC.MD$.

b) Gọi $MO = d$. Tính $MA.MB$ theo r và d.

6. Cho mặt cầu $S(O\ ;\ r)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$.

a) Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp đó.

b) Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$ với mặt cầu trên.

8. Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì tổng độ dài của các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau.

9. Cho một điểm A cố định và một đường thẳng a cố định không đi qua A. Gọi O là một điểm thay đổi trên a. Chứng minh rằng các mặt cầu tâm O bán kính $r = OA$ luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

10. Cho hình chóp $S.ABC$ có bốn đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Cho ba điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu và cho biết $\widehat{ACB} = 90^{\circ}$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng ?

a) Đường tròn qua ba điểm A, B, C nằm trên mặt cầu.

b) AB là một đường kính của mặt cầu đã cho.

c) AB không phải là đường kính của mặt cầu.

d) AB là đường kính của đường tròn giao tuyến tạo bởi mặt cầu và mặt phẳng (ABC).

2. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Biết $AB = AD = a$, tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón được tạo thành khi quay đường gấp khúc BDA quanh cạnh AB.

3. Chứng minh rằng hình chóp có tất cả các cạnh bên bằng nhau nội tiếp được trong một mặt cầu.

4. Hình chóp $S.ABC$ có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh bên SA, SB, SC và tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA tại trung điểm của mỗi cạnh. Chứng minh rằng hình chóp đó là hình chóp tam giác đều.

5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống mặt phẳng (BCD).

a) Chứng minh H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính độ dài đoạn AH.

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối trụ có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác BCD và chiều cao AH.

6. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Từ tâm O của hình vuông dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trên Δ lấy điểm S sao cho $OS = \frac{a}{2}\cdot$ Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó.

7. Cho hình trụ có bán kính đáy r, trục $OO' = 2r$ và mặt cầu đường kính OO'.

a) Hãy so sánh diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ đó.

b) Hãy so sánh thể tích khối trụ và thể tích khối cầu được tạo nên bởi hình trụ và mặt cầu đã cho.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Diện tích S là :

(A) πa^2;　　(B) $\pi a^2\sqrt{2}$;

(C) $\pi a^2\sqrt{3}$;　　(D) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

2. Gọi S là diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được sinh ra bởi đoạn thẳng AC' của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh b khi quay xung quanh trục AA'. Diện tích S là :

(A) πb^2 ;　　(B) $\pi b^2\sqrt{2}$;

(C) $\pi b^2\sqrt{3}$;　　(D) $\pi b^2\sqrt{6}$.

3. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có $SA = a$, $AB = b$, $AC = c$. Mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, S có bán kính r bằng :

(A) $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$; (B) $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

(C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; (D) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

4. Cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động trong không gian nhưng luôn thoả mãn điều kiện $\widehat{MAB} = \alpha$ với $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Khi đó điểm M thuộc mặt nào trong các mặt sau :

(A) Mặt nón ; (B) Mặt trụ ;

(C) Mặt cầu ; (D) Mặt phẳng.

5. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là :

(A) 0 ; (B) 1 ;

(C) 2 ; (D) vô số.

6. Trong các đa diện sau đây, đa diện nào không luôn luôn nội tiếp được trong mặt cầu :

(A) hình chóp tam giác (tứ diện) ; (B) hình chóp ngũ giác đều ;

(C) hình chóp tứ giác ; (D) hình hộp chữ nhật.

7. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Khi quay các cạnh tứ diện đó xung quanh trục là cạnh AB, có bao nhiêu hình nón được tạo thành ?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Diện tích xung quanh của hình nón đó là :

(A) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$; (B) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; (D) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$.

9. Cho tam giác đều ABC cạnh a quay xung quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó là :

(A) πa^2 ; (B) $2\pi a^2$; (C) $\frac{1}{2}\pi a^2$; (D) $\frac{3}{4}\pi a^2$.

10. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

(A) Mặt trụ và mặt nón có chứa các đường thẳng.

(B) Mọi hình chóp luôn nội tiếp trong mặt cầu.

(C) Có vô số mặt phẳng cắt mặt cầu theo những đường tròn bằng nhau.

(D) Luôn có hai đường tròn có bán kính khác nhau cùng nằm trên một mặt nón.

11. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng r. Gọi O, O' là tâm của hai đáy với $OO' = 2r$. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O'. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai ?

(A) Diện tích mặt cầu bằng diện tích xung quanh của hình trụ.

(B) Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ.

(C) Thể tích khối cầu bằng $\frac{3}{4}$ thể tích khối trụ.

(D) Thể tích khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích khối trụ.

12. Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích thước là a, b, c. Khi đó bán kính r của mặt cầu bằng :

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; (B) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

(C) $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$; (D) $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$.

13. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Thể tích của khối trụ đó là :

(A) $\frac{1}{2}a^3\pi$; (B) $\frac{1}{4}a^3\pi$;

(C) $\frac{1}{3}a^3\pi$; (D) $a^3\pi$.

14. Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là :

(A) $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$; (B) $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{2}$;

(C) $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$; (D) $\pi a^2\sqrt{3}$.

15. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào sai ?

(A) Có một mặt cầu ngoại tiếp một hình tứ diện bất kì.

(B) Có một mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp đều.

(C) Có một mặt cầu ngoại tiếp một hình hộp.

(D) Có một mặt cầu ngoại tiếp một hình hộp chữ nhật.

16. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng :

(A) 1 ; (B) 2 ;

(C) 1,5 ; (D) 1,2.

17. Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Khi đó diện tích đáy của cái lọ hình trụ là :

(A) $16\pi r^2$; (B) $18\pi r^2$;

(C) $9\pi r^2$; (D) $36\pi r^2$.

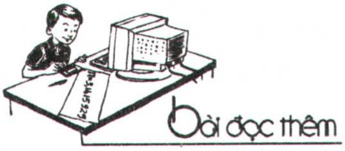
18. Cho ba điểm A, C, B nằm trên một mặt cầu, biết rằng góc $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng ?

(A) AB là một đường kính của mặt cầu.

(B) Luôn có một đường tròn nằm trên mặt cầu ngoại tiếp tam giác ABC.

(C) Tam giác ABC vuông cân tại C.

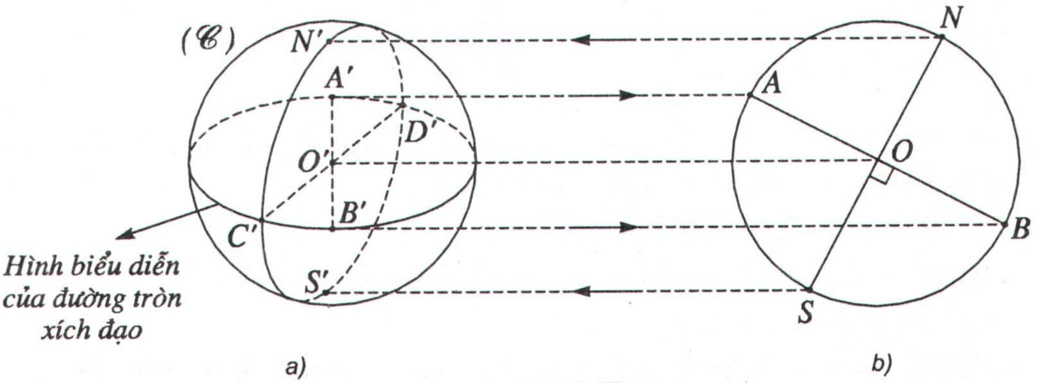
(D) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn lớn.



Biểu diễn hình cầu như thế nào cho đúng ?

Nếu chiếu song song một hình cầu (mà không phải là phép chiếu vuông góc) lên một mặt phẳng ta được hình chiếu là một elip. Do đó người ta có thể dùng hình elip để biểu diễn cho hình cầu. Trong thực tế khi biểu diễn hình cầu người ta thường dùng hình tròn mà không dùng hình elip vì hình tròn phù hợp với hình ảnh của hình cầu mà chúng ta thu nhận được bằng mắt. Trong các sách giáo khoa người ta thường dùng hình tròn để biểu diễn cho hình cầu. Để hình biểu diễn có tính trực quan người ta thường vẽ thêm hình biểu diễn của một vài đường tròn nào đó trên mặt cầu.

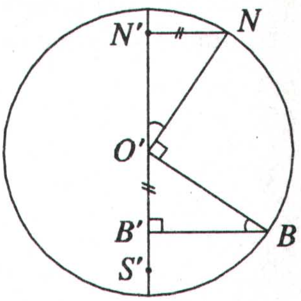
Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của hình cầu, cần chú ý rằng khi ta dùng một đường tròn $(\mathscr{C})$ biểu diễn cho hình cầu thì đường tròn này là hình chiếu vuông góc của đường tròn lớn thuộc mặt cầu và nằm trên mặt phẳng song song với mặt chiếu. Để hình biểu diễn được trực quan hơn người ta thường vẽ thêm đường elip biểu diễn cho đường tròn xích đạo. Đường tròn này là một đường tròn lớn của mặt cầu, nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục đi qua hai cực N, S của mặt cầu. Khi đó hai cực N, S của hình cầu được biểu diễn bằng hai điểm tương ứng N', S' không nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$ (h.2.27a). Muốn xác định chính xác hai điểm N', S' này, ta hãy cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng phụ (α) chứa trục NS và vuông góc với mặt phẳng chiếu (xem h.2.27b).



a) b)

Hình 2.27

Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo đường tròn nhận AB làm đường kính và khi đó trục NS của mặt cầu vuông góc với AB tại O (h.2.27b). Từ hình 2.27b, ta dễ dàng tìm lại được các điểm biểu diễn cho hai cực là N', S' ở trên hình 2.27a theo chiều các mũi tên. Trên hình 2.27c ta có hai tam giác vuông $O'NN'$ và $O'BB'$ bằng nhau và ta suy ra cần phải vẽ hình biểu diễn sao cho $N'N = O'B'$. Trên hình 2.27a, ta vẽ thêm hình biểu diễn của đường tròn đi qua hai cực N, S của mặt cầu. Đường tròn này cắt đường tròn xích đạo tại hai điểm C, D và trên hình thực ta có $NS \perp CD$. Do đó ta cần biểu diễn sao cho $N'S'$ và $C'D'$ phải là hai đường kính liên hợp với nhau của elip biểu diễn cho đường tròn lớn của mặt cầu đi qua bốn điểm N, S, C, D nói trên.



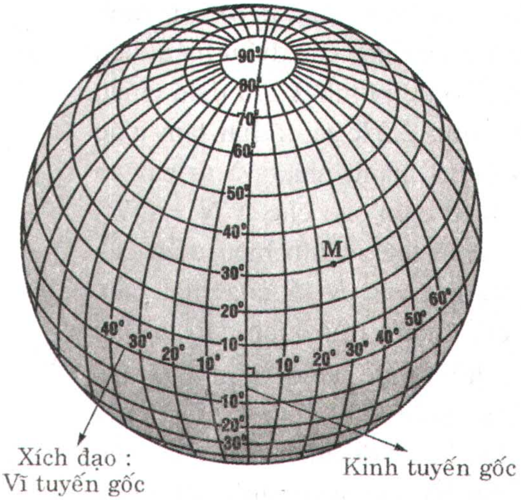
c)

Hình 2.27

Những vấn đề có liên quan đến kinh tuyến và vĩ tuyến của Trái Đất

1. Việc đánh số các kinh tuyến và vĩ tuyến

Trái Đất là một trong các hành tinh của Hệ Mặt Trời, có dạng hình cầu với bán kính r = 6370 km. Đường xích đạo là vĩ tuyến lớn nhất, dài khoảng 40 076 km, chia Trái Đất thành hai phần : bán cầu Bắc và bán cầu Nam. Để đánh số các kinh tuyến và vĩ tuyến trên bề mặt Trái Đất, người ta phải chọn một kinh tuyến và một vĩ tuyến làm gốc. Kinh tuyến gốc và vĩ tuyến gốc đều được ghi số 0°. *Kinh tuyến gốc* đi qua đài thiên văn Grin-uýt ở ngoại ô thành phố Luân Đôn (nước Anh), tuy hiện nay đài thiên văn này đã chuyển đi nơi khác, nhưng kinh tuyến gốc vẫn ở chỗ cũ. *Vĩ tuyến gốc* chính là đường xích đạo (h.2.28).



Hình 2.28

Những kinh tuyến nằm ở phía đông của kinh tuyến gốc là những *kinh tuyến đông* (Đ) được đánh số từ 1^{o}, 2^{o}, ... đến 180^{o}. Kinh tuyến 180^{o} là kinh tuyến đối diện với kinh tuyến 0^{o}. Tương tự, những kinh tuyến nằm phía tây của kinh tuyến gốc là những *kinh tuyến tây* (T).

Các vĩ tuyến ở phía bắc xích đạo và phía nam xích đạo theo thứ tự đều được đánh số từ 1^{o}, 2^{o}, ... đến 90^{o}. Vị trí của mỗi địa điểm trên Trái Đất được xác định tại chỗ cắt nhau của cặp kinh tuyến và vĩ tuyến đi qua điểm đó. Ví dụ ta có kinh độ và vĩ độ của một điểm *M* là :

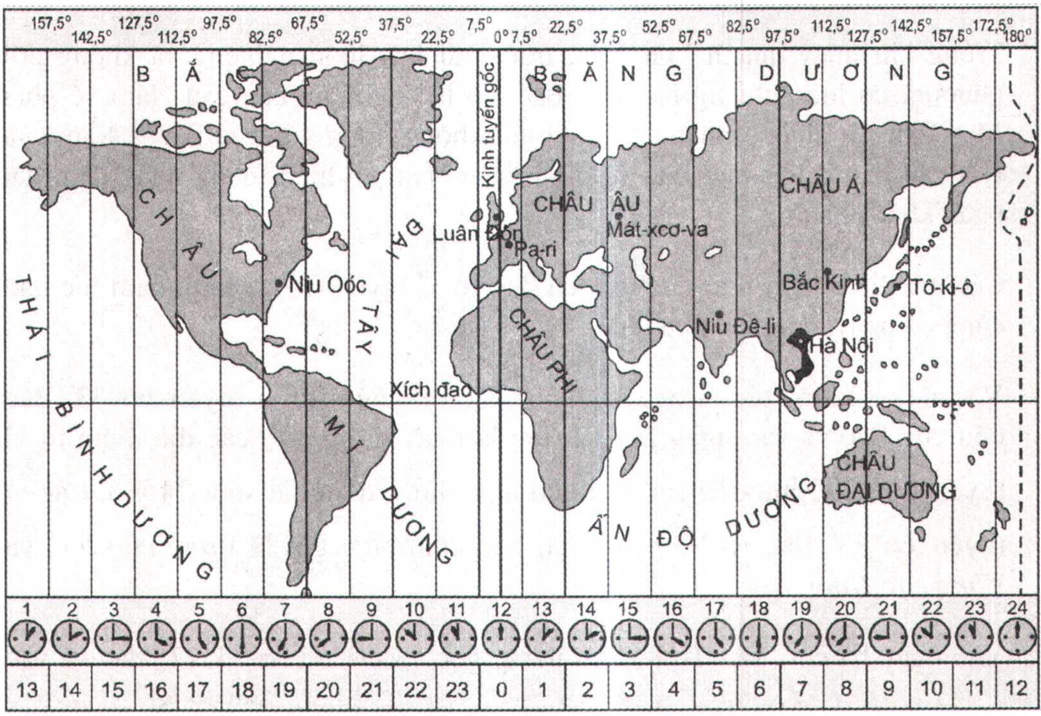
$$M\begin{cases}20^{o}30'\text{Đ}\\30^{o}\text{ B.}\end{cases}$$

Với toạ độ địa lí của điểm *M* đó, ta hiểu rằng điểm *M* nằm trên kinh tuyến $20^{o}30'$ về phía đông kinh tuyến gốc và nằm trên vĩ tuyến 30^{o} về phía bắc quả Địa cầu.

2. Các khu vực giờ trên Trái Đất

Trái Đất tự quay một vòng quanh trục của nó trong khoảng 24 giờ. Để tiện cho việc tính giờ và giao dịch trên thế giới, người ta chia bề mặt Trái Đất ra

24 *múi giờ*. Mỗi khu vực có một giờ riêng, chiều rộng mỗi khu vực bằng 15 kinh độ và lấy giờ của kinh tuyến đi qua chính giữa khu vực đó làm giờ chung của khu vực. Khu vực có kinh tuyến gốc đi qua được quy định là khu vực giờ 0. Nước Việt Nam ta ở khu vực giờ thứ 7 (h.2.29).


157,5°
142,5°
127,5°
112,5°
97,5°
82,5°
67,5°
52,5°
37,5°
22,5°
7,5°
0°
7,5°
22,5°
37,5°
52,5°
67,5°
82,5°
97,5°
112,5°
127,5°
142,5°
157,5°
172,5°
180°
BẮC BĂNG DƯƠNG
Kinh tuyến gốc
CHÂU MĨ
ĐẠI TÂY DƯƠNG
THÁI BÌNH DƯƠNG
Niu Oóc
Luân Đôn
Pa-ri
CHÂU ÂU
Mát-xcơ-va
CHÂU Á
Bắc Kinh
Tô-ki-ô
Niu Đê-li
Hà Nội
Xích đạo
CHÂU PHI
ẤN ĐỘ DƯƠNG
CHÂU ĐẠI DƯƠNG
0°
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Các khu vực giờ trên Trái Đất

Hình 2.29

Hội nghị quốc tế năm 1884 quy định khu vực có kinh tuyến gốc đi qua làm khu vực giờ gốc và đánh số 0. Ranh giới của khu vực này là từ kinh tuyến 7°30′ T đến 7°30′ Đ. Từ khu vực giờ gốc về phía đông là khu vực có số thứ tự tăng dần (từ 1, 2, 3, ... đến 23) và mỗi khu vực cách nhau 1 giờ. Khu vực giờ số 0 trùng với khu vực giờ số 24. Về mặt nguyên tắc, giới hạn của các khu vực giờ là các đường kinh tuyến được đánh số, nhưng trong thực tế ở một số khu vực, các đường giới hạn đó lại là các đường gấp khúc để phù hợp với các đường biên giới quốc gia. Đối diện với khu vực giờ gốc (0 giờ) là khu vực số 12 và để tính ngày giờ được thuận tiện trong các hoạt động chung của thế giới, người ta quy định lấy kinh tuyến 180° qua khu vực giờ số 12 nằm giữa Thái Bình Dương làm đường chuyển (đổi) ngày quốc tế.

Nếu đi từ phía Tây sang phía Đông qua kinh tuyến 180^{o} thì phải lùi lại một ngày lịch, còn nếu đi từ phía đông sang phía tây qua kinh tuyến 180^{o} thì phải tăng thêm một ngày lịch.

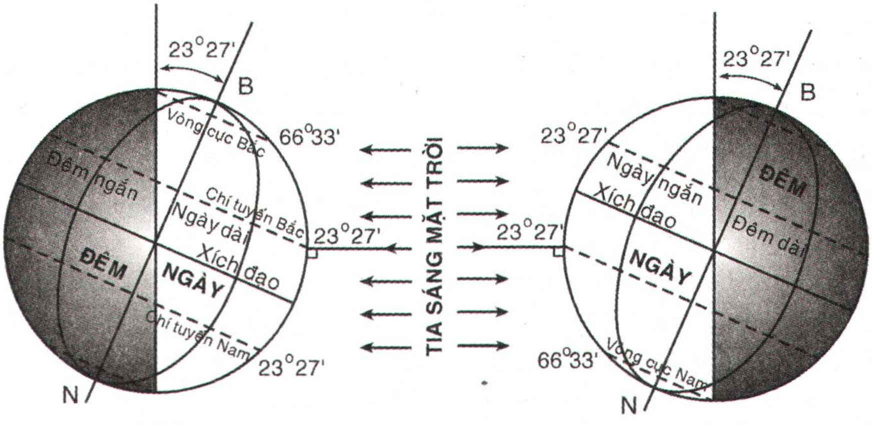
3. Các vĩ tuyến đặc biệt : các vòng cực và các chí tuyến

Trong khi quay quanh Mặt Trời, trục Trái Đất luôn nghiêng và không đổi phương, có lúc nghiêng bán cầu Bắc, có lúc nghiêng bán cầu Nam về phía Mặt Trời. Do đường phân chia sáng tối không trùng với trục Bắc – Nam của Địa cầu nên ở bán cầu Bắc và ở bán cầu Nam có hiện tượng ngày đêm dài ngắn khác nhau.

Các địa điểm nằm trên đường xích đạo (ở vĩ tuyến 0^{o}), quanh năm lúc nào cũng có ngày đêm dài như nhau.

Vào ngày 22–6 (tức là ngày hạ chí) các địa điểm từ vĩ tuyến $66^{o}33'$ Bắc đến cực Bắc và vào ngày 22–12 (tức là ngày đông chí) các địa điểm từ vĩ tuyến $66^{o}33'$ Nam đến cực Nam có ngày hoặc đêm dài suốt 24 giờ. Các vĩ tuyến $66^{o}33'$ Bắc và Nam của hai bán cầu được gọi là *Vòng cực Bắc* và *Vòng cực Nam*.

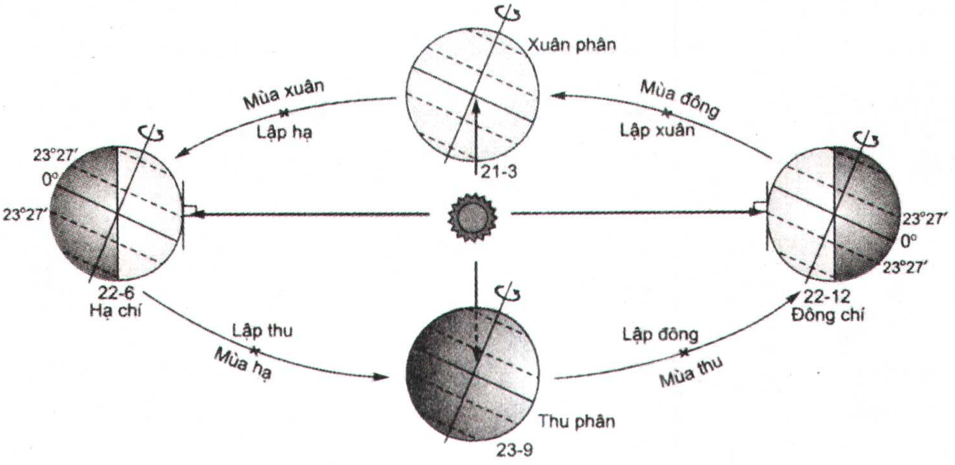
Vào ngày hạ chí, Mặt Trời chiếu thẳng góc vào vĩ tuyến $23^{o}27'$ Bắc và vào ngày đông chí Mặt Trời chiếu thẳng góc vào vĩ tuyến $23^{o}27'$ Nam. Các vĩ tuyến này lần lượt được gọi là *Chí tuyến Bắc* và *Chí tuyến Nam* (h.2.30).


23°27'
B
Vòng cực Bắc
66°33'
Đêm ngắn
Chí tuyến Bắc
Ngày dài
23°27'
ĐÊM
NGÀY
Xích đạo
Chí tuyến Nam
23°27'
N
TIA SÁNG MẶT TRỜI
23°27'
B
23°27'
Ngày ngắn
ĐÊM
Xích đạo
Đêm dài
23°27'
NGÀY
66°33'
Vòng cực Nam
N

22-6 22-12

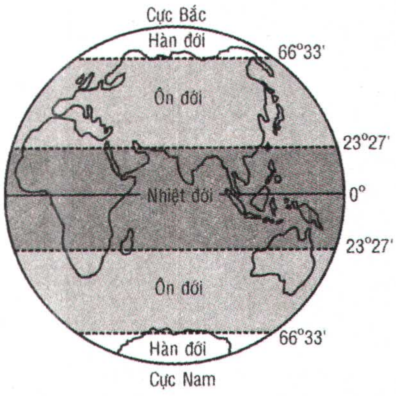
Hình 2.30

Vào các ngày 21–3 (tức là ngày xuân phân) và ngày 23–9 (tức là ngày thu phân) hai bán cầu nhận được góc chiếu như nhau của Mặt Trời, do đó tiếp thu được một lượng nhiệt và ánh sáng như nhau (h.2.31).


Xuân phân
Mùa xuân
Lập hạ
Mùa đông
Lập xuân
21-3
23°27'
0°
23°27'
22-6
Hạ chí
23°27'
0°
23°27'
22-12
Đông chí
Lập thu
Mùa hạ
Lập đông
Mùa thu
Thu phân
23-9

Hình 2.31

Các chí tuyến và các vòng cực là những vĩ tuyến đặc biệt làm ranh giới phân chia bề mặt Trái Đất ra năm vành đai nhiệt song song với xích đạo. Tương ứng với năm vành đai nhiệt, người ta chia Trái Đất ra năm đới khí hậu sau đây (h.2.32) :


Cực Bắc
Hàn đới
66°33'
Ôn đới
23°27'
Nhiệt đới
0°
23°27'
Ôn đới
66°33'
Hàn đới
Cực Nam

Hình 2.32

* *Nhiệt đới* chứa xích đạo giới hạn từ vĩ tuyến $23^{o}27'$ Bắc đến vĩ tuyến $23^{o}27'$ Nam. Đó là miền giữa hai Chí tuyến Bắc và Chí tuyến Nam. Đây là vùng khí hậu nóng và mưa nhiều.

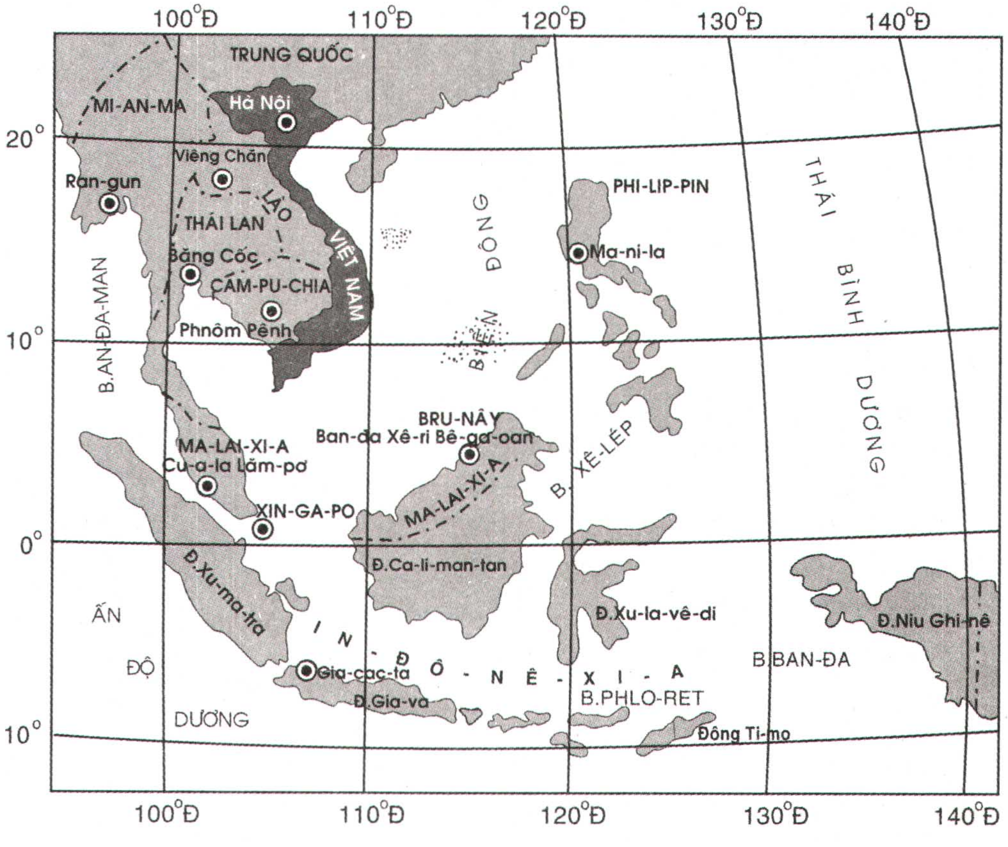
* *Ôn đới* gồm có hai đới khí hậu, bao gồm từ Chí tuyến Bắc đến Vòng cực Bắc và từ Chí tuyến Nam đến Vòng cực Nam. Đây là hai khu vực có lượng nhiệt trung bình và có bốn mùa thể hiện rất rõ trong năm.

* *Hàn đới* gồm hai đới khí hậu từ Vòng cực Bắc đến cực Bắc, Vòng cực Nam đến cực Nam. Đây là hai khu vực giá lạnh và có băng tuyết hầu như quanh năm.

Như vậy sự phân hoá khí hậu trên bề mặt Trái Đất phụ thuộc vào nhiều yếu tố, trong đó có sự phân hoá theo vĩ độ.

4. Vị trí của nước Việt Nam

Xem bản đồ khu vực Đông Nam Á, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng vùng đất liền của nước Việt Nam ở vào vùng kinh tuyến từ 102°8′ Đ đến 109°27′ Đ và ở vào vùng vĩ tuyến từ 8°27′ B đến 23°23′ B (h.2.33).


100°Đ
110°Đ
120°Đ
130°Đ
140°Đ
20°
10°
0°
10°
TRUNG QUỐC
MI-AN-MA
Hà Nội
Viêng Chăn
Ran-gun
LÀO
THÁI LAN
VIỆT NAM
Băng Cốc
CĂM-PU-CHIA
Phnôm Pênh
B.AN-ĐA-MAN
BIỂN ĐÔNG
PHI-LIP-PIN
Ma-ni-la
THÁI BÌNH DƯƠNG
BRU-NÂY
Ban-đa Xê-ri Bê-ga-oan
MA-LAI-XI-A
Cu-a-la Lăm-pơ
XIN-GA-PO
MA-LAI-XI-A
B.XÊ-LÉP
Đ.Ca-li-man-tan
Đ.Xu-ma-tra
ẤN ĐỘ DƯƠNG
I N Đ Ô - N Ê - X I - A
Đ.Xu-la-vê-di
Đ.Niu Ghi-nê
B.BAN-ĐA
Gia-các-ta
Đ.Gia-va
B.PHLO-RET
Đông Ti-mo

Bản đồ khu vực Đông Nam Á

Hình 2.33

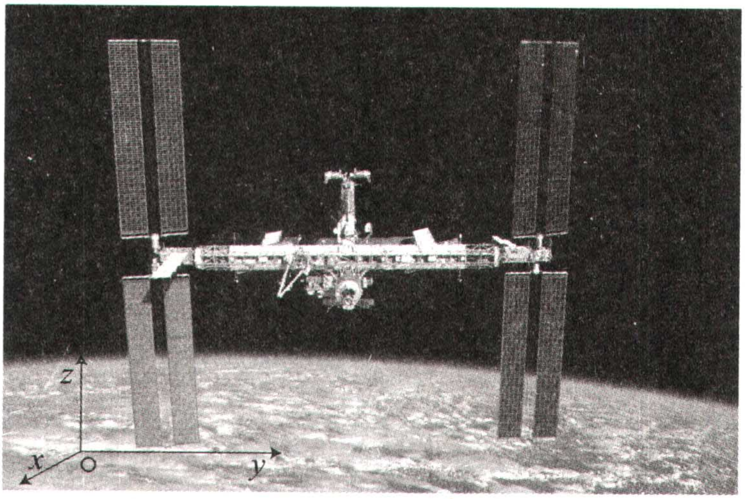
CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

- Hệ toạ độ trong không gian
- Phương trình mặt phẳng
- Phương trình đường thẳng

Trụ sở Liên Hiệp Quốc tại Niu Oóc (New York)

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



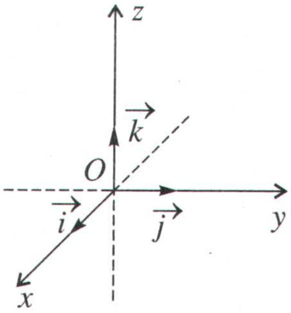
Trái Đất và Trạm vũ trụ ISS (International Space Station) trong không gian

I- TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ CỦA VECTƠ

1. Hệ toạ độ

Trong không gian, cho ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là *các vectơ đơn vị* trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

Hệ ba trục như vậy được gọi là *hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc Oxyz* trong không gian, hay đơn giản được gọi là *hệ toạ độ Oxyz* (h.3.1).



Hình 3.1

Điểm O được gọi là *gốc tọa độ*.

Các mặt phẳng Oxy, Oyz, Ozx đôi một vuông góc với nhau được gọi là các *mặt phẳng toạ độ*.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

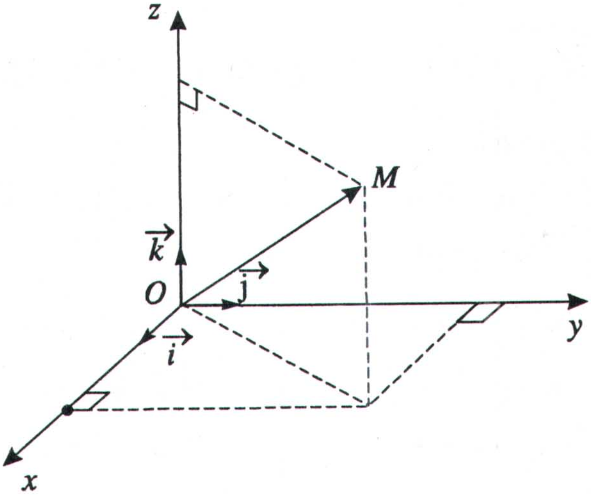
và $$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

△1 Trong không gian *Oxyz*, cho một điểm *M*. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo ba vectơ không đồng phẳng $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ đã cho trên các trục *Ox*, *Oy*, *Oz*.

2. Toạ độ của một điểm

Trong không gian *Oxyz*, cho một điểm *M* tuỳ ý. Vì ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ không đồng phẳng nên có một bộ ba số $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ duy nhất sao cho :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. (h.3.2)



Hình 3.2

Ngược lại với bộ ba số $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ ta có một điểm *M* duy nhất trong không gian thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ta gọi bộ ba số $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ đó là *toạ độ của điểm M* đối với hệ trục toạ độ *Oxyz* đã cho và viết :

$$M = (x\ ;\ y\ ;\ z) \text{ hoặc } M(x\ ;\ y\ ;\ z).$$

3. Toạ độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$, khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1 ; a_2 ; a_3)$ sao cho : $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Ta gọi bộ ba số $(a_1 ; a_2 ; a_3)$ đó là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ cho trước và viết $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1 ; a_2 ; a_3)$.

Nhận xét. Trong hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ của điểm M chính là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Ta có : $M = (x ; y ; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x ; y ; z)$.

△2 Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, có $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Hãy tính toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

II- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Định lí

Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ *và* $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$. *Ta có :*

a) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2 ; a_3 + b_3)$,

b) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 ; a_2 - b_2 ; a_3 - b_3)$,

c) $k\vec{a} = k(a_1 ; a_2 ; a_3) = (ka_1 ; ka_2 ; ka_3)$

với k là một số thực.

Chứng minh

Theo giả thiết : $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$,

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}.$$

Vậy $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2 ; a_3 + b_3)$.

Chứng minh tương tự cho trường hợp b) và c).

Hệ quả

a) Cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$ *và* $\vec{b}=(b_1\,;\,b_2\,;\,b_3)$.

Ta có : $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow a_1=b_1\,;\,a_2=b_2\,;\,a_3=b_3$.

b) Vectơ $\vec{0}$ *có toạ độ là (0 ; 0 ; 0).*

c) Với $\vec{b}\neq\vec{0}$ *thì hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho :* $a_1=kb_1,\ a_2=kb_2,\ a_3=kb_3$.

d) Trong không gian Oxyz, nếu cho hai điểm $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$, $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ *thì :*

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A\,;\,z_B-z_A).$$

III- TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Định lí

Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$ *và* $\vec{b}=(b_1\,;\,b_2\,;\,b_3)$ *được xác định bởi công thức*

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

Chứng minh

$$\vec{a}.\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}).(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_1\vec{i}^{\,2}+a_1b_2\vec{i}.\vec{j}+a_1b_3\vec{i}.\vec{k}+a_2b_1\vec{j}.\vec{i}\ +$$

$$+\ a_2b_2\vec{j}^{\,2}+a_2b_3\vec{j}.\vec{k}+a_3b_1\vec{k}.\vec{i}+a_3b_2\vec{k}.\vec{j}+a_3b_3\vec{k}^{\,2}.$$

Vì $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$ và $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$

nên $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

2. *Ứng dụng*

a) Độ dài của một vectơ. Cho vectơ $\vec{a}=(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$. Ta biết rằng $|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$ hay $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Do đó $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm. Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ và $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm *A* và *B* chính là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$. Do đó ta có :

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}.$$

c) Góc giữa hai vectơ. Nếu φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$ và $\vec{b}=(b_1\,;\,b_2\,;\,b_3)$ với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$. Do đó :

$$\boxed{\cos\varphi=\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

Từ đó ta suy ra

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

△3 Với hệ toạ độ *Oxyz* trong không gian, cho $\vec{a}=(3\,;\,0\,;\,1)$, $\vec{b}=(1\,;\,-1\,;\,-2)$, $\vec{c}=(2\,;\,1\,;\,-1)$. Hãy tính $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

IV- PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lí

Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm I(a ; b ; c) bán kính r có phương trình là :

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$

Chứng minh

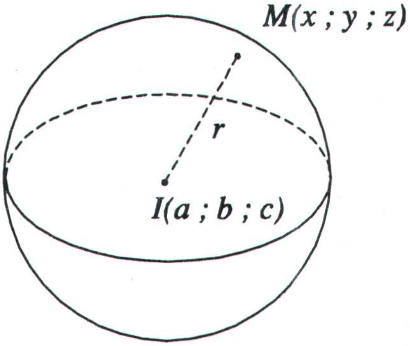
Gọi $M(x ; y ; z)$ là một điểm thuộc mặt cầu (S) tâm I bán kính r.

Khi đó : $M \in (S) \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{IM}\right| = r$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2 .$$

Do đó $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ là phương trình của mặt cầu (S).



Hình 3.3

4 Viết phương trình mặt cầu tâm I(1 ; –2 ; 3) có bán kính $r = 5$.

Nhận xét. Phương trình mặt cầu nói trên có thể viết dưới dạng :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $d = a^2+b^2+c^2-r^2$.

Từ đó người ta chứng minh được rằng phương trình dạng $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$ với điều kiện $A^2+B^2+C^2-D>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I = (-A ; -B ; -C)$ có bán kính $r = \sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

Ví dụ. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình :

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+5=0 .$$

Giải

Phương trình mặt cầu đã cho tương đương với phương trình sau :

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=3^2.$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I=(-2\,;\,1\,;\,-3)$, bán kính $r=3$.

BÀI TẬP

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

1. Cho ba vectơ $\vec{a}=(2\,;-5\,;3)$, $\vec{b}=(0\,;2\,;-1)$, $\vec{c}=(1\,;7\,;2)$.

a) Tính toạ độ của vectơ $\vec{d}=4\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+3\vec{c}$.

b) Tính toạ độ của vectơ $\vec{e}=\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{c}$.

2. Cho ba điểm $A=(1\,;-1\,;1)$, $B=(0\,;1\,;2)$, $C=(1\,;0\,;1)$.
Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A=(1\,;0\,;1)$, $B=(2\,;1\,;2)$, $D=(1\,;-1\,;1)$, $C'=(4\,;5\,;-5)$. Tính toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

4. Tính

a) $\vec{a}.\vec{b}$ với $\vec{a}=(3\,;0\,;-6)$, $\vec{b}=(2\,;-4\,;0)$.

b) $\vec{c}.\vec{d}$ với $\vec{c}=(1\,;-5\,;2)$, $\vec{d}=(4\,;3\,;-5)$.

5. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau đây :

a) $x^2+y^2+z^2-8x-2y+1=0$;

b) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+8y+15z-3=0$.

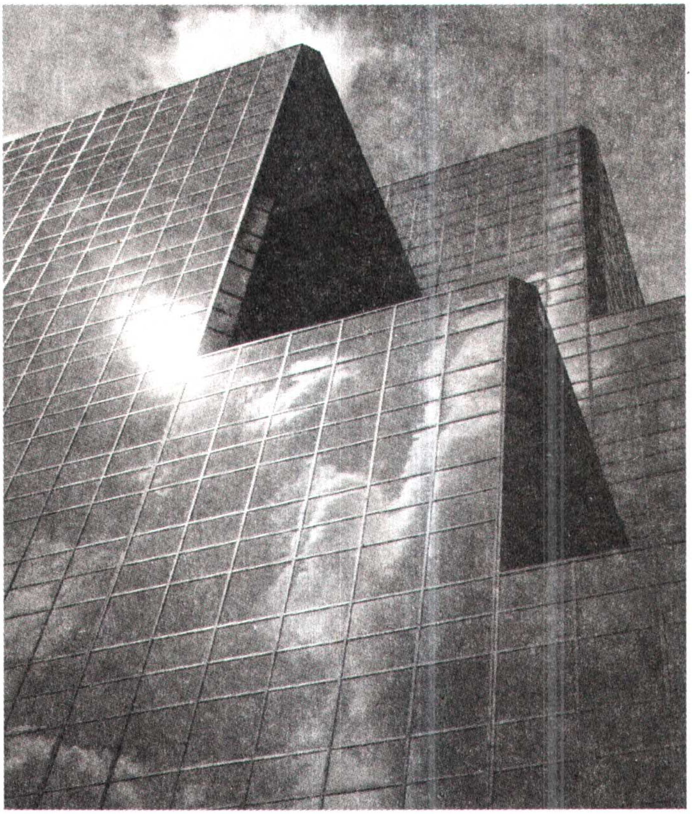
6. Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau đây :

a) Có đường kính AB với $A(4\,;-3\,;7)$, $B(2\,;1\,;3)$.

b) Đi qua điểm $A(5\,;-2\,;1)$ và có tâm $C(3\,;-3\,;1)$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Trong hình học không gian ở lớp 11 ta đã biết một số cách xác định mặt phẳng, chẳng hạn như xác định mặt phẳng bằng ba điểm không thẳng hàng, bằng hai đường thẳng cắt nhau, ... Bây giờ ta sẽ xác định mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.



Các bức tường của toà nhà cao tầng hiện đại cho ta hình ảnh của mặt phẳng trong không gian

I- VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

Định nghĩa

Cho mặt phẳng (α). *Nếu vectơ* $\vec{n}$ *khác* $\vec{0}$ *và có giá vuông góc với mặt phẳng* (α) *thì* $\vec{n}$ *được gọi là vectơ pháp tuyến của* (α).

☞ ***Chú ý.*** Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ với $k \neq 0$, cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Bài toán

Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a} = (a_1\,;\, a_2\,;\, a_3)$ và $\vec{b} = (b_1\,;\, b_2\,;\, b_3)$. Chứng minh rằng nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì (α) sẽ nhận vectơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2\,;\, a_3b_1 - a_1b_3\,;\, a_1b_2 - a_2b_1)$ làm vectơ pháp tuyến.

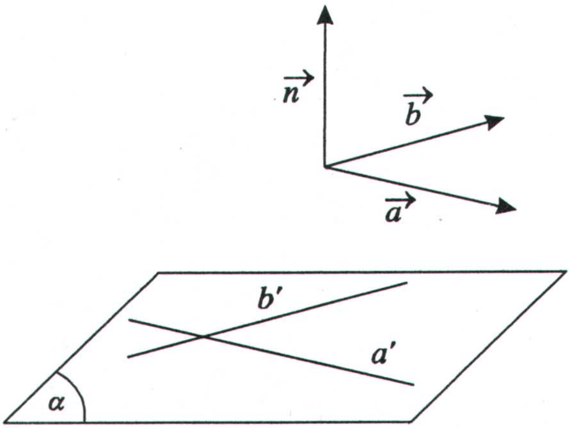
Giải

Ta có :

$$\begin{aligned}\vec{a}.\vec{n} &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)\\ &= (a_1a_2b_3 - a_2a_1b_3) + (a_3a_1b_2 - a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - a_3a_2b_1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Tương tự $\vec{b}.\vec{n} = 0$.

Vậy vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, có nghĩa là giá của nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (α) (h.3.4). Suy ra giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α). Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương nên các toạ độ của $\vec{n}$ không đồng thời bằng không, suy ra $\vec{n} \neq \vec{0}$. Do đó vectơ $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).



Hình 3.4

Vectơ $\vec{n}$ xác định như trên được gọi là tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ hoặc $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

△1 Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2\,;\, -1\,;\, 3)$, $B(4\,;\, 0\,;\, 1)$, $C(-10\,;\, 5\,;\, 3)$. Hãy tìm toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

II- PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

Bài toán 1

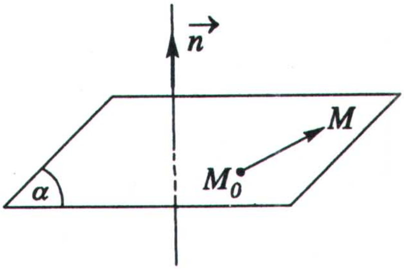
Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{n}(A ; B ; C)$ làm vectơ pháp tuyến. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y ; z)$ thuộc mặt phẳng (α) là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Giải

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0 ; z - z_0)$ (h.3.5)

$$\begin{aligned} M \in (\alpha) \Leftrightarrow M_0M \subset (\alpha) &\Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \\ &\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0 \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$



Hình 3.5

Bài toán 2

Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng tập hợp các điểm $M(x ; y ; z)$ thoả mãn phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0) là một mặt phẳng nhận vectơ $\vec{n} = (A ; B ; C)$ làm vectơ pháp tuyến.

Giải

Ta lấy điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ sao cho $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (chẳng hạn nếu $A \neq 0$ thì ta lấy $x_0 = -\dfrac{D}{A}$; $y_0 = z_0 = 0$).

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và nhận $\vec{n} = (A\,;B\,;C)$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có :

$$M \in (\alpha) \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \text{ vì } D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Từ hai bài toán trên ta có định nghĩa sau.

1. Định nghĩa

> *Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.*

Nhận xét

a) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A\,;B\,;C)$.

b) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ nhận vectơ $\vec{n}(A\,;B\,;C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

△2 Hãy tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha) : 4x - 2y - 6z + 7 = 0$.

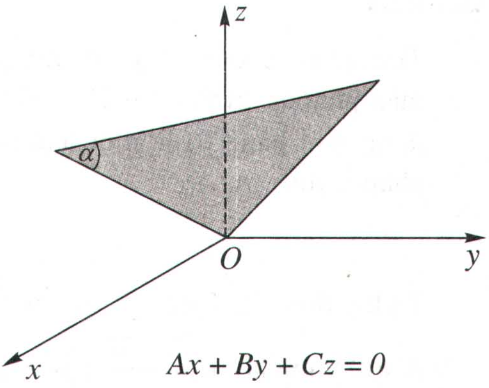
△3 Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với $M(1\,;1\,;1)$, $N(4\,;3\,;2)$, $P(5\,;2\,;1)$.

2. Các trường hợp riêng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) :

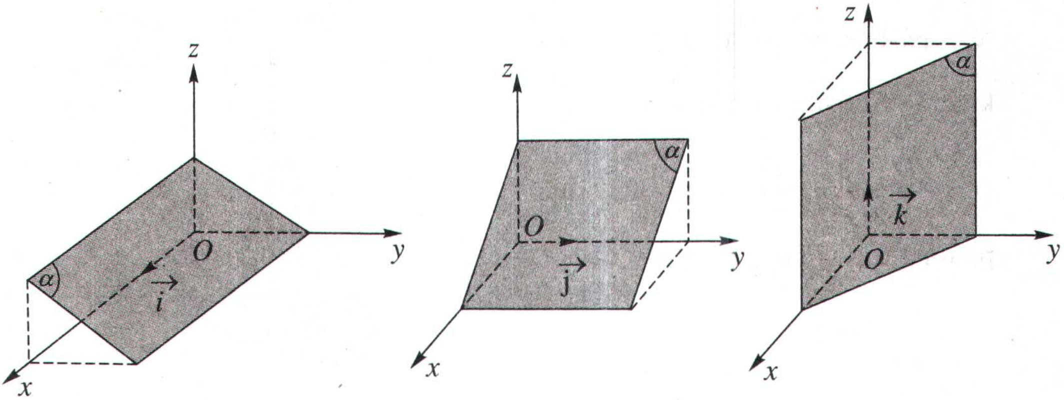
$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

a) Nếu $D = 0$ thì gốc toạ độ O có toạ độ thoả mãn phương trình của mặt phẳng (α). Vậy (α) đi qua gốc toạ độ O (h.3.6).



Hình 3.6

b) Nếu một trong ba hệ số A, B, C bằng 0, chẳng hạn $A = 0$ thì mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0\,;\,B\,;\,C)$. Ta có $\vec{n}.\vec{i} = 0$. Do $\vec{i}$ là vectơ chỉ phương của Ox nên ta suy ra (α) song song hoặc chứa trục Ox (h.3.7a).



$By + Cz + D = 0$ a)

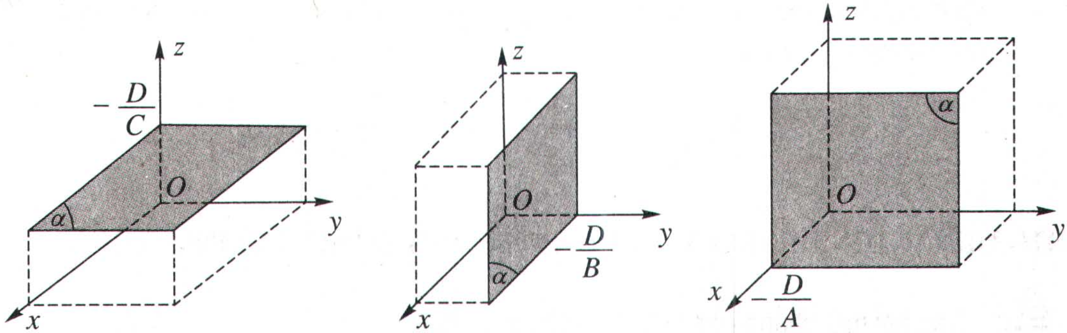
$Ax + Cz + D = 0$ b)

$Ax + By + D = 0$ c)

Hình 3.7

4 Nếu $B = 0$ hoặc $C = 0$ thì mặt phẳng (α) có đặc điểm gì ?

c) Nếu hai trong ba hệ số A, B, C bằng 0, ví dụ $A = B = 0$ và $C \neq 0$ thì từ trường hợp b) ta suy ra mặt phẳng (α) song song với Ox và Oy hoặc (α) chứa Ox và Oy. Vậy (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxy) (h.3.8a).



$Cz + D = 0$ a)

$By + D = 0$ b)

$Ax + D = 0$ c)

Hình 3.8

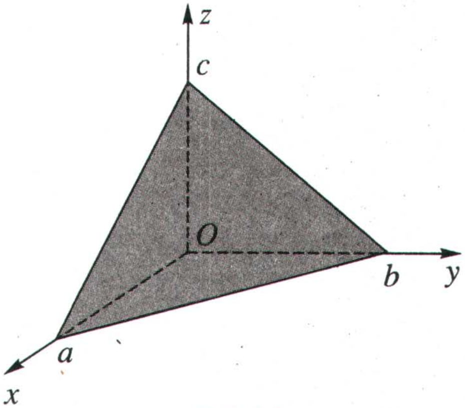
△5 Nếu $A = C = 0$ và $B \neq 0$ hoặc nếu $B = C = 0$ và $A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) có đặc điểm gì ?

Nhận xét

Nếu cả bốn hệ số A, B, C, D đều khác 0 thì bằng cách đặt $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$, ta có thể đưa phương trình (1) về dạng sau đây :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2)$$

Khi đó mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm có toạ độ là $(a\,;0\,;0)$, $(0\,;b\,;0)$, $(0\,;0\,;c)$. Người ta còn gọi phương trình (2) là *phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn* (h.3.9).



Hình 3.9

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(1\,;0\,;0)$, $N(0\,;2\,;0)$, $P(0\,;0\,;3)$. Hãy viết phương trình mặt phẳng (MNP).

Giải

Áp dụng phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình của mặt phẳng (MNP) là :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \text{ hay } 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

III- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

△6 Cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình

$$(\alpha) : x - 2y + 3z + 1 = 0,$$

$$(\beta) : 2x - 4y + 6z + 1 = 0.$$

Có nhận xét gì về vectơ pháp tuyến của chúng ?

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình

$$(\alpha_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\alpha_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

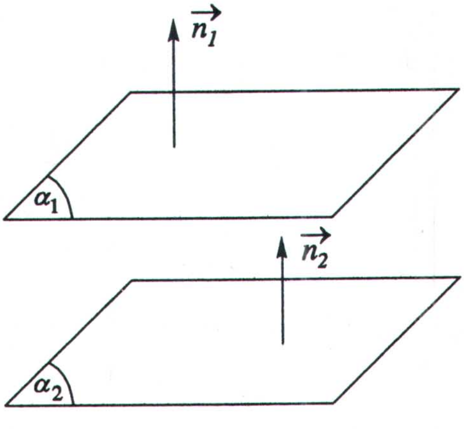
Khi đó (α_1) và (α_2) có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n_1} = (A_1 ; B_1 ; C_1),$$

$$\vec{n_2} = (A_2 ; B_2 ; C_2).$$

Ta xét điều kiện để hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) song song hoặc vuông góc với nhau.

1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song



Hình 3.10

Ta nhận thấy hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi chúng cùng vuông góc với một đường thẳng, nghĩa là khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ của chúng cùng phương (h.3.10).

Khi đó ta có : $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$.

Nếu $D_1 = kD_2$ thì ta có (α_1) trùng với (α_2).

Nếu $D_1 \neq kD_2$ thì (α_1) song song với (α_2).

Vậy ta suy ra

$$(\alpha_1)//(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1\,;\,B_1\,;\,C_1) = k(A_2\,;\,B_2\,;\,C_2) \\ D_1 \neq kD_2. \end{cases}$$

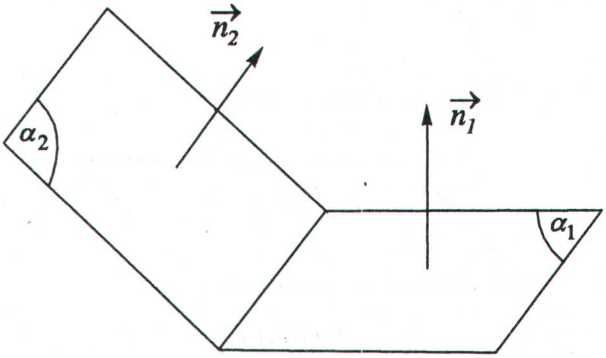
$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1\,;\,B_1\,;\,C_1) = k(A_2\,;\,B_2\,;\,C_2) \\ D_1 = kD_2. \end{cases}$$

☞ ***Chú ý***

(α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$ (h.3.11)

$$\Leftrightarrow (A_1\,;\,B_1\,;\,C_1) \neq k(A_2\,;\,B_2\,;\,C_2).$$



Hình 3.11

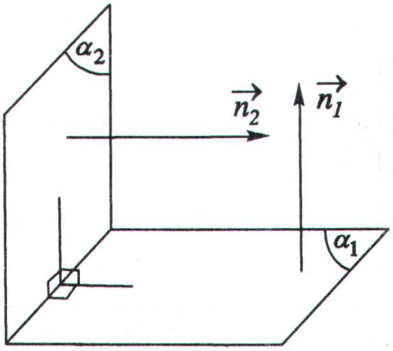
Ví dụ. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1\,;\,-2\,;\,3)$ và song song với mặt phẳng (β) : $2x - 3y + z + 5 = 0$.

Giải

Vì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) nên (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2\,;\,-3\,;\,1)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1\,;\,-2\,;\,3)$, vậy (α) có phương trình :

$$2(x-1) - 3(y+2) + 1(z-3) = 0 \text{ hay } 2x - 3y + z - 11 = 0.$$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc



Hình 3.12

Ta nhận thấy hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ tương ứng của chúng vuông góc với nhau (h.3.12).

Vậy ta có điều kiện :

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Ví dụ. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3 ; 1 ; -1)$, $B(2 ; -1 ; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng (β) có phương trình :

$$2x - y + 3z - 1 = 0.$$

Giải

Gọi $\vec{n}_\beta$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β). Hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trên (α) là :

$$\overrightarrow{AB} = (-1 ; -2 ; 5) \text{ và } \vec{n}_\beta = (2 ; -1 ; 3).$$

Do đó mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến :

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_\beta = (-1 ; 13 ; 5).$$

Vậy phương trình của (α) là :

$$-1(x - 3) + 13(y - 1) + 5(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 13y - 5z + 5 = 0.$$

IV- KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Định lí

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α) *có phương trình* $Ax + By + Cz + D = 0$ *và điểm* $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$. *Khoảng cách từ điểm* M_0 *đến mặt phẳng* (α), *kí hiệu là* $d(M_0, (\alpha))$, *được tính theo công thức :*

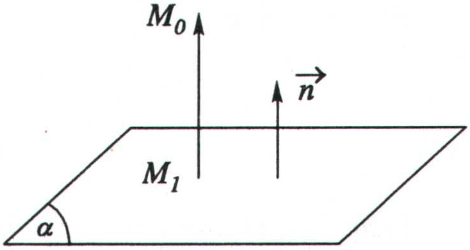
$$\boxed{d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Chứng minh

Gọi $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ là hình chiếu vuông góc của M_0 trên (α) (h.3.13). Xét hai vectơ

$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1 ; y_0 - y_1 ; z_0 - z_1)$

và $\vec{n} = (A ; B ; C)$, ta thấy $\overrightarrow{M_1M_0}$ và $\vec{n}$ cùng phương vì giá của chúng cùng vuông góc với (α). Suy ra :



Hình 3.13

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| . \left|\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0} . \vec{n}\right|$$

$$= \left|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)\right|$$

$$= \left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1)\right| . \qquad (1)$$

Mặt khác vì M_1 thuộc (α) nên ta có :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

hay $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. (2)

Thay (2) vào (1) ta được $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| . \left|\vec{n}\right| = \left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|$.

Gọi khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) là $d(M_0, (\alpha))$.

Vậy $d(M_0, (\alpha)) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ và từ điểm $M(1 ; -2 ; 13)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 2y - z + 3 = 0$.

Giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách ở trên ta có :

$$d(O, (\alpha)) = \frac{|2.(0) - 2.(0) - (0) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{3} = 1;$$

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|2.1 - 2.(-2) - 13 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) cho bởi các phương trình sau đây :

$$(\alpha) : x + 2y + 2z + 11 = 0,$$

$$(\beta) : x + 2y + 2z + 2 = 0.$$

Giải

Ta biết khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới mặt phẳng kia.

Ta lấy điểm $M(0 ; 0 ; -1)$ thuộc (β), kí hiệu $d((\alpha), (\beta))$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β), ta có :

$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha)) = \frac{|(0) + 2.(0) + 2.(-1) + 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

△7 Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) cho bởi các phương trình sau đây :

$$(\alpha) : x - 2 = 0,$$
$$(\beta) : x - 8 = 0.$$

BÀI TẬP

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

1. Viết phương trình của mặt phẳng :

a) Đi qua điểm $M(1 ; -2 ; 4)$ và nhận $\vec{n} = (2 ; 3 ; 5)$ làm vectơ pháp tuyến ;

b) Đi qua điểm $A(0 ; -1 ; 2)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{u} = (3 ; 2 ; 1)$ và $\vec{v} = (-3 ; 0 ; 1)$;

c) Đi qua ba điểm $A(-3 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; -2 ; 0)$ và $C(0 ; 0 ; -1)$.

2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2 ; 3 ; 7)$, $B(4 ; 1 ; 3)$.

3. a) Lập phương trình của các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm $M(2 ; 6 ; -3)$ và lần lượt song song với các mặt phẳng toạ độ.

4. Lập phương trình của mặt phẳng :

a) Chứa trục Ox và điểm $P(4 ; -1 ; 2)$;

b) Chứa trục Oy và điểm $Q(1 ; 4 ; -3)$;

c) Chứa trục Oz và điểm $R(3 ; -4 ; 7)$.

5. Cho tứ diện có các đỉnh là $A(5 ; 1 ; 3)$, $B(1 ; 6 ; 2)$, $C(5 ; 0 ; 4)$, $D(4 ; 0 ; 6)$.

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD).

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

6. Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2 ; -1 ; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + 3z + 4 = 0$.

7. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(5 ; 2 ; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + z - 7 = 0$.

8. Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau :

a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$;

b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$.

9. Tính khoảng cách từ điểm $A(2 ; 4 ; -3)$ lần lượt đến các mặt phẳng sau :

a) $2x - y + 2z - 9 = 0$;

b) $12x - 5z + 5 = 0$;

c) $x = 0$.

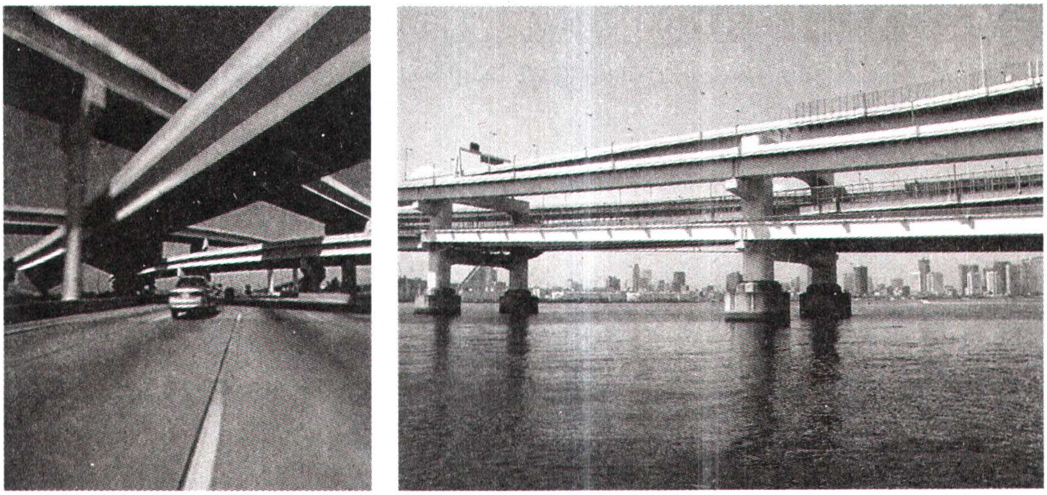
10. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp toạ độ :

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng nói trên.

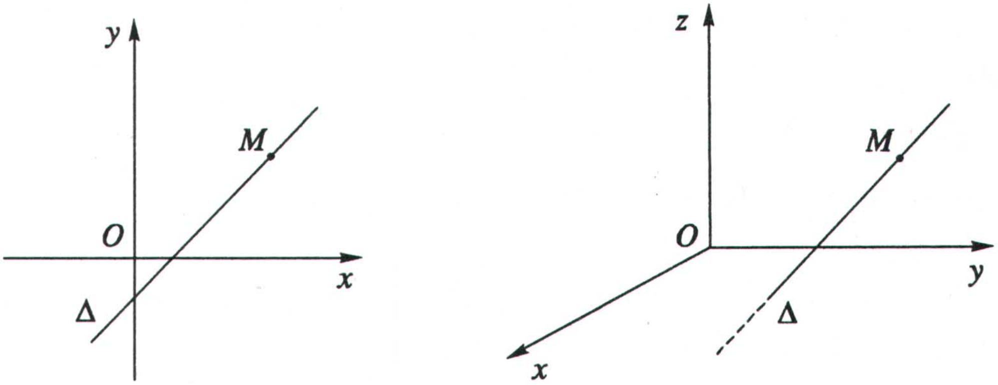
§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN



Hình ảnh của các đường thẳng trong không gian – các cầu vượt trong thành phố và qua sông

Ta đã biết trong mặt phẳng (Oxy) phương trình tham số của đường thẳng có dạng $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$ với $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ (h.3.14a).

Như vậy trong không gian $Oxyz$ phương trình của đường thẳng có dạng như thế nào ? (h.3.14b)



a) Đường thẳng trong mặt phẳng

b) Đường thẳng trong không gian

Hình 3.14

I- PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

△1 Trong không gian Oxyz cho điểm $M_0(1 ; 2 ; 3)$ và hai điểm $M_1(1 + t ; 2 + t ; 3 + t)$, $M_2(1 + 2t ; 2 + 2t ; 3 + 2t)$ di động với tham số t. Hãy chứng tỏ ba điểm M_0 , M_1, M_2 luôn thẳng hàng.

Định lí

Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ làm vectơ chỉ phương. Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y ; z)$ nằm trên Δ là có một số thực t sao cho

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

Chứng minh

Ta có : $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0 ; z - z_0)$.

Điểm M nằm trên Δ khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{a}$, nghĩa là $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ với t là một số thực. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = ta_2 \\ z - z_0 = ta_3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

Định nghĩa

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ là phương trình có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Trong đó t là tham số.

☞ ***Chú ý.*** Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì người ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ dưới dạng chính tắc như sau :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Ví dụ 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1 ; -4 ; -5)$.

Giải

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t. \end{cases}$

Ví dụ 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB với $A(1 ; -2 ; 3)$ và $B(3 ; 0 ; 0)$.

Giải

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2\,;2\,;-3)$.

Phương trình tham số của AB là : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$

Ví dụ 3. Chứng minh đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ vuông góc với mặt phẳng

$(\alpha) : 2x + 4y + 6z + 9 = 0$.

Giải

d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1\,;2\,;3)$;

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2\,;4\,;6)$.

Ta có $\vec{n} = 2\vec{a}$, suy ra $d \perp (\alpha)$.

△2 Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$$

Hãy tìm toạ độ của một điểm M trên Δ và toạ độ một vectơ chỉ phương của Δ.

II- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT NHAU, CHÉO NHAU

△3 Cho hai đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là

$$d : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 5 + 2t'. \end{cases}$$

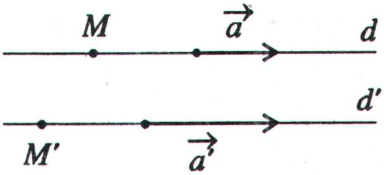
a) Hãy chứng tỏ điểm $M(1\,;2\,;3)$ là điểm chung của d và d' ;

b) Hãy chứng tỏ d và d' có hai vectơ chỉ phương không cùng phương.

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng d, d' lần lượt đi qua hai điểm M, M' và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}$ và $\vec{a}'$. Sau đây ta xét các điều kiện để hai đường thẳng d và d' song song, cắt nhau hoặc chéo nhau.

1. Điều kiện để hai đường thẳng song song

> *d song song với d' khi và chỉ khi chúng không có điểm chung và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{a}'$ cùng phương (h.3.15).*



Hình 3.15

Vì vậy, ta có d song song với d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}' \\ M \in d \\ M \notin d'. \end{cases}$$

Đặc biệt d trùng với d' khi và chỉ khi $\begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}' \\ M \in d \\ M \in d'. \end{cases}$

Ví dụ 1. Chứng minh hai đường thẳng sau đây song song :

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t'. \end{cases}$$

Giải

d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1 ; 2 ; -1)$, lấy $M(1 ; 0 ; 3) \in d$;

d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (2 ; 4 ; -2)$.

Vì $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}'$ và M không thuộc d' nên d song song với d'.

△4 Chứng minh hai đường thẳng sau đây trùng nhau :

$$d:\begin{cases}x=3-t\\y=4+t\\z=5-2t\end{cases}\quad \text{và}\quad d':\begin{cases}x=2-3t'\\y=5+3t'\\z=3-6t'\end{cases}$$

2. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau

Gọi phương trình tham số của hai đường thẳng d và d' lần lượt là :

$$d:\begin{cases}x=x_0+ta_1\\y=y_0+ta_2\\z=z_0+ta_3\end{cases}\quad \text{và}\quad d':\begin{cases}x=x'_0+t'a'_1\\y=y'_0+t'a'_2\\z=z'_0+t'a'_3.\end{cases}$$

> *Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình ẩn t, t' sau*
>
> $$\begin{cases}x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1\\y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2\\z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3\end{cases}\qquad (I)$$
>
> *có đúng một nghiệm.*

☞ ***Chú ý***. Giả sử hệ (I) có nghiệm $(t_0\,;\,t'_0)$, để tìm giao điểm M_0 của d và d' ta có thể thay t_0 vào phương trình tham số của d hoặc thay t'_0 vào phương trình tham số của d'.

Ví dụ 2. Tìm giao điểm của hai đường thẳng sau :

$$d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\\z=3-t\end{cases}\quad \text{và}\quad d':\begin{cases}x=2-2t'\\y=-2+t'\\z=1+3t'.\end{cases}$$

Giải

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases}1+t=2-2t' & (1)\\2+3t=-2+t' & (2)\\3-t=1+3t' & (3)\end{cases}$$

Từ (1.) và (2) suy ra $t = -1$ và $t' = 1$. Thay vào phương trình (3) ta thấy nó thoả mãn. Vậy hệ phương trình trên có nghiệm là $t = -1$, $t' = 1$.

Suy ra d cắt d' tại điểm $M(0\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

3. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau

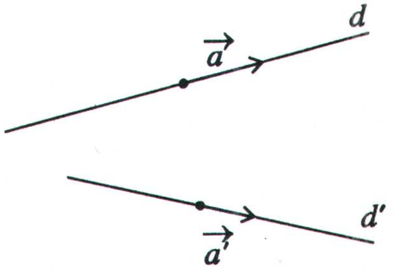
Ta biết rằng hai đường thẳng chéo nhau nếu chúng không cùng phương và không cắt nhau. Do vậy

> *Hai đường thẳng d và d' chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và hệ phương trình*
>
> $$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$
>
> *vô nghiệm (với d và d' có phương trình như ở mục II.2).*

Ví dụ 3. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t'. \end{cases}$$

Giải



Hình 3.16

Ta có : $\vec{a} = (2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ và $\vec{a}' = (3\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

Vì $\vec{a} \neq k\vec{a}'$ suy ra d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau (h.3.16).

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} 1 + 2t = 1 + 3t' \\ -1 + 3t = -2 + 2t' \\ 5 + t = -1 + 2t'. \end{cases}$

Từ hai phương trình đầu ta được $t = -\frac{3}{5}$ và $t' = -\frac{2}{5}$, thay vào phương trình cuối không thoả mãn.

Ta suy ra hệ trên vô nghiệm. Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Ví dụ 4. Chứng minh hai đường thẳng sau đây vuông góc

$$d:\begin{cases}x = 5 - t\\ y = -3 + 2t\\ z = 4t\end{cases} \quad \text{và} \quad d':\begin{cases}x = 9 + 2t'\\ y = 13 + 3t'\\ z = 1 - t'.\end{cases}$$

Giải

d và d' lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (-1\,;2\,;4)$ và $\vec{a}' = (2\,;3\,;-1)$.

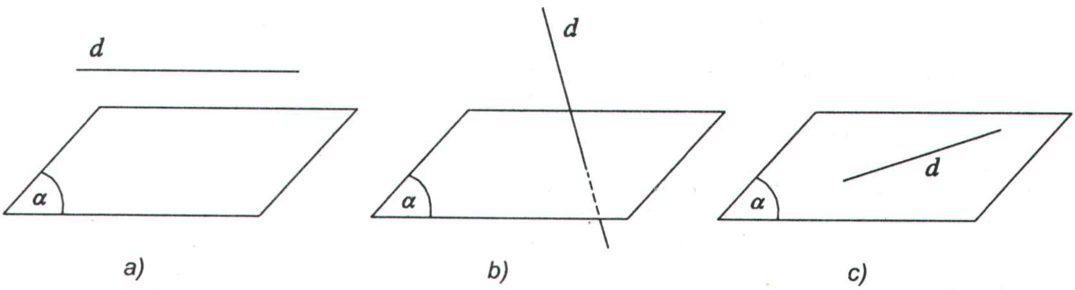
Ta có $\vec{a}.\vec{a}' = -2 + 6 - 4 = 0$.

Suy ra $d \perp d'$.

Nhận xét. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x = x_0 + ta_1\\ y = y_0 + ta_2\\ z = z_0 + ta_3.\end{cases}$

Xét phương trình $A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0$ (t là ẩn). (1)

– Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì d và (α) không có điểm chung, vậy $d \,//\, (\alpha)$ (h.3.17a).



Hình 3.17

– Nếu phương trình (1) có đúng một nghiệm $t = t_0$ thì d cắt (α) tại điểm $M_0(x_0 + t_0a_1 ; y_0 + t_0a_2 ; z_0 + t_0a_3)$ (h.3.17b).

– Nếu phương trình (1) có vô số nghiệm thì d thuộc (α) (h.3.17c).

△5 Xét số giao điểm của mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 3 = 0$ với đường thẳng d trong các trường hợp sau :

a) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 \end{cases}$; b) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$; c) $d : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

BÀI TẬP

1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) d đi qua điểm $M(5 ; 4 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 ; -3 ; 1)$;

b) d đi qua điểm $A(2 ; -1 ; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - z + 5 = 0$;

c) d đi qua điểm $B(2 ; 0 ; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$;

d) d đi qua hai điểm $P(1 ; 2 ; 3)$ và $Q(5 ; 4 ; 4)$.

2. Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

lần lượt trên các mặt phẳng sau :

a) (Oxy) ;

b) (Oyz).

3. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau :

a) $d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=-2+3t\\z=6+4t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=5+t\\y=-1-4t\\z=20+t\end{cases}$;

b) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1+2t'\\y=-1+2t'\\z=2-2t'.\end{cases}$

4. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau

$$d:\begin{cases}x=1+at\\y=t\\z=-1+2t\end{cases} \quad \text{và} \quad d':\begin{cases}x=1-t'\\y=2+2t'\\z=3-t'.\end{cases}$$

5. Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

a) $d:\begin{cases}x=12+4t\\y=9+3t\\z=1+t\end{cases}$ và $(\alpha): 3x+5y-z-2=0$;

b) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=1+2t\end{cases}$ và $(\alpha): x+3y+z+1=0$;

c) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$ và $(\alpha): x+y+z-4=0$.

6. Tính khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-3+2t\\y=-1+3t\\z=-1+2t\end{cases}$ và mặt phẳng

$(\alpha): 2x-2y+z+3=0$.

7. Cho điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t. \end{cases}$

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ.

b) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ.

8. Cho điểm $M(1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α).

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

9. Cho hai đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1. \end{cases}$$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

10. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp toạ độ :

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến các mặt phẳng $(A'BD)$ và $(B'D'C)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Các bài toán sau đây đều cho trong hệ toạ độ $Oxyz$.

1. Cho bốn điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $D(-2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

c) Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

2. Cho mặt cầu (S) có đường kính là AB biết rằng $A(6\ ;\ 2\ ;\ -5)$, $B(-4\ ;\ 0\ ;\ 7)$.

a) Tìm toạ độ tâm I và tính bán kính r của mặt cầu (S).

b) Lập phương trình của mặt cầu (S).

c) Lập phương trình của mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A.

3. Cho bốn điểm $A(-2 ; 6 ; 3)$, $B(1 ; 0 ; 6)$, $C(0 ; 2 ; -1)$, $D(1 ; 4 ; 0)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra ABCD là một tứ diện.

b) Tính chiều cao AH của tứ diện ABCD.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD.

4. Lập phương trình tham số của đường thẳng :

a) Đi qua hai điểm $A(1 ; 0 ; -3)$, $B(3 ; -1 ; 0)$.

b) Đi qua điểm $M(2 ; 3 ; -5)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -5t. \end{cases}$$

5. Cho mặt cầu (S) có phương trình : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C).

Hãy xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C).

6. Cho mặt phẳng (α) có phương trình $3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

a) Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa điểm M và vuông góc với đường thẳng d.

7. Cho đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t. \end{cases}$$

Cho điểm $A(-1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ và vectơ $\vec{a}=(6\ ;\ -2\ ;\ -3)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với giá của $\vec{a}$.

b) Tìm giao điểm của d và (α).

c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với giá của $\vec{a}$ và cắt đường thẳng d.

8. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu

$$(S):\ x^2+y^2+z^2-10x+2y+26x+170=0$$

và song song với hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=-5+2t\\ y=1-3t\\ z=-13+2t\end{cases};\qquad d':\begin{cases}x=-7+3t\\ y=-1-2t\\ z=8.\end{cases}$$

9. Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ trên mặt phẳng $(\alpha):\ 2x-y+2z+11=0$.

10. Cho điểm $M(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ và mặt phẳng $(\alpha):\ x+3y-z-27=0$. Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua (α).

11. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng toạ độ Oxz và cắt hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=-4+t\\ z=3-t\end{cases};\qquad d':\begin{cases}x=1-2t'\\ y=-3+t'\\ z=4-5t'.\end{cases}$$

12. Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm $A(1\ ;\ -2\ ;\ -5)$ qua đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1-t\\ z=2t.\end{cases}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

Trong không gian Oxyz cho ba vectơ

$$\vec{a} = (-1 ; 1 ; 0),\ \vec{b} = (1 ; 1 ; 0) \text{ và } \vec{c} = (1 ; 1 ; 1).$$

Sử dụng giả thiết này để trả lời các câu hỏi 1, 2 và 3 sau đây.

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$; (B) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$;

(C) $\vec{a} \perp \vec{b}$; (D) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $\vec{a}.\vec{c} = 1$;

(B) $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương ;

(C) $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$;

(D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

3. Cho hình bình hành *OADB* có $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (*O* là gốc toạ độ). Toạ độ của tâm hình bình hành *OADB* là :

(A) (0 ; 1 ; 0) ; (B) (1 ; 0 ; 0) ;

(C) (1 ; 0 ; 1) ; (D) (1 ; 1 ; 0).

Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(1 ; 0 ; 0), B (0 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ; 1) và D(1 ; 1 ; 1).

Sử dụng giả thiết này để trả lời các câu hỏi 4, 5 và 6 sau đây.

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Bốn điểm *A, B, C, D* tạo thành một tứ diện ;

(B) Tam giác *ABD* là tam giác đều ;

(C) $AB \perp CD$;

(D) Tam giác *BCD* là tam giác vuông.

5. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Toạ độ điểm G là trung điểm của MN là :

(A) $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; (B) $G\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$;

(C) $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$; (D) $G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

6. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính là :

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\sqrt{2}$;

(C) $\sqrt{3}$; (D) $\frac{3}{4}$.

7. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0;0;-1)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(3;0;5)$.

Phương trình của mặt phẳng (α) là :

(A) $5x-2y-3z-21=0$; (B) $-5x+2y+3z+3=0$;

(C) $10x-4y-6z+21=0$; (D) $5x-2y-3z+21=0$.

8. Cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là :

(A) $2x-3y-4z+2=0$; (B) $2x+3y-4z-2=0$;

(C) $4x+6y-8z+2=0$; (D) $2x-3y-4z+1=0$.

9. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục toạ độ tại ba điểm $M(8;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;4)$. Phương trình của (α) là :

(A) $\frac{x}{8}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=0$; (B) $\frac{x}{4}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$;

(C) $x-4y+2z=0$; (D) $x-4y+2z-8=0$.

10. Cho ba mặt phẳng $(\alpha)\ x+y+2z+1=0$;

$(\beta)\ x+y-z+2=0$;

$(\gamma)\ x-y+5=0$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) $(\alpha)\perp(\beta)$;
(B) $(\gamma)\perp(\beta)$;
(C) $(\alpha)//(\gamma)$;
(D) $(\alpha)\perp(\gamma)$.

11. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4\ ;\ -6\ ;\ 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

(A) $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}$;
(B) $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}$;

(C) $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$;
(D) $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6-3t\\z=2+t.\end{cases}$

12. Cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-7z+1=0$.

Phương trình tham số của d là :

(A) $\begin{cases}x=-1+4t\\y=-2+3t\\z=-3-7t\end{cases}$;
(B) $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=3-7t\end{cases}$;

(C) $\begin{cases}x=1+3t\\y=2-4t\\z=3-7t\end{cases}$;
(D) $\begin{cases}x=-1+8t\\y=-2+6t\\z=-3-14t.\end{cases}$

13. Cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=3+4t\end{cases} \quad \text{và} \quad d_2:\begin{cases}x=3+4t\\y=5+6t\\z=7+8t.\end{cases}$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) $d_1\perp d_2$;
(B) $d_1 // d_2$;
(C) $d_1\equiv d_2$;
(D) d_1 và d_2 chéo nhau.

14. Cho mặt phẳng (α) : $2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1. \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

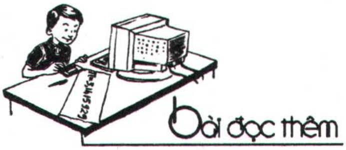
(A) $d \perp (\alpha)$;　　(B) d cắt (α) ;

(C) $d \mathbin{//} (\alpha)$;　　(D) $d \subset (\alpha)$.

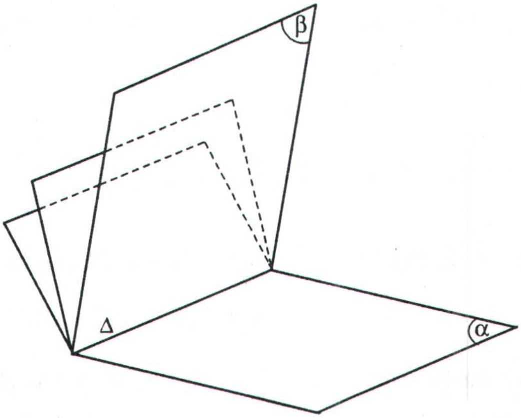
15. Cho (S) là mặt cầu tâm $I(2 ; 1 ; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình : $2x - 2y - z + 3 = 0$.

Bán kính của (S) là :

(A) 2 ;　　(B) $\frac{2}{3}$;　　(C) $\frac{4}{3}$;　　(D) $\frac{2}{9}$.



Chùm mặt phẳng



Hình 3.18

Trong không gian cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Tập hợp các mặt phẳng (γ) chứa đường thẳng Δ nói trên được gọi là chùm mặt phẳng xác định bởi (α) và (β) và kí hiệu là $((\alpha), (\beta))$.

Nếu (α) và (β) lần lượt có phương trình $(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$(\beta) : A_2x + B_2y + C_1z + D_2 = 0$$

thì người ta chứng minh được phương trình của chùm mặt phẳng $((\alpha), (\beta))$ có dạng :

$$m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (1)$$

với $m^2 + n^2 \neq 0$.

Phương trình (1) có thể được viết tắt là : $m(\alpha) + n(\beta) = 0$.

Ta thấy phương trình của chùm mặt phẳng rất đơn giản nhưng nó lại giúp chúng ta giải được rất nhiều bài toán về phương trình mặt phẳng một cách độc đáo và cực kì ngắn gọn.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α) và (β) lần lượt có phương trình $(\alpha) : x + y + 5z - 1 = 0$

và $(\beta) : 2x + 3y - z + 2 = 0$.

a) Chứng minh rằng (α) cắt (β) theo giao tuyến Δ.

b) Viết phương trình mặt phẳng (γ) chứa giao tuyến Δ và điểm $M(3 ; 2 ; 1)$.

Giải

a) Mặt phẳng (α) và (β) lần lượt có các vectơ pháp tuyến :

$$\vec{n}_\alpha = (1 ; 1 ; 5),\ \vec{n}_\beta = (2 ; 3 ; -1).$$

Vì $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ nên (α) cắt (β) theo giao tuyến Δ.

b) Phương trình mặt phẳng (γ) của chùm $((\alpha), (\beta))$ có dạng :

$$m(x + y + 5z - 1) + n(2x + 3y - z + 2) = 0 \qquad (1)$$

Điểm $M(3 ; 2 ; 1)$ thuộc mặt phẳng (γ) nên khi thay toạ độ của M vào (1) ta sẽ tính được các giá trị cụ thể của cặp số $(m ; n)$ để xác định phương trình của (γ).

Ta có : $m(3 + 2 + 5 - 1) + n(6 + 6 - 1 + 2) = 0 \Leftrightarrow 9m + 13n = 0$.

Chọn $m = -13$ ta được $n = 9$.

Thay $m = -13$ và $n = 9$ vào (1) ta được phương trình của mặt phẳng (γ) cần tìm : $5x + 14y - 74z + 31 = 0$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Cho lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, O và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy, mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của OO' và cắt các cạnh bên của lăng trụ. Chứng minh rằng (P) chia lăng trụ đã cho thành hai đa diện có thể tích bằng nhau.

2. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $C'D'$. Mặt phẳng (AEF) chia khối lập phương đó thành hai khối đa diện (H) và (H') trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A'. Tính thể tích của (H).

3. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính r. Hình nón có đường tròn đáy (C) và đỉnh I đều thuộc (S) được gọi là hình nón nội tiếp mặt cầu (S). Gọi h là chiều cao của hình nón đó.

a) Tính thể tích của hình nón theo r và h.

b) Xác định h để thể tích của hình nón là lớn nhất.

4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1 ; 2 ; -1)$, $B(7 ; -2 ; 3)$ và đường thẳng d có phương trình :

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d và AB cùng nằm trong một mặt phẳng.

b) Tìm điểm I trên d sao cho $AI + BI$ nhỏ nhất.

5. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết rằng $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm.

a) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

b) Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=4a^2$.

a) Tính diện tích mặt cầu (S) và thể tích của khối cầu tương ứng.

b) Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) theo đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C).

c) Tính diện tích xung quanh của hình trụ nhận (C) làm đáy và có chiều cao là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

7. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình

$$d_1:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=-t\end{cases} \qquad \text{và} \qquad d_2:\begin{cases}x=2t'\\ y=-1+t'\\ z=t'.\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2.

8. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1 ; 0 ; -1)$, $B(3 ; 4 ; -2)$, $C(4 ; -1 ; 1)$, $D(3 ; 0 ; 3)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tính khoảng cách từ D đến (ABC).

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

d) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

9. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(2 ; 4 ; -1)$, $B(1 ; 4 ; -1)$, $C(2 ; 4 ; 3)$, $D(2 ; 2 ; -1)$.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (ABD).

10. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-2t\\ y=2+t\\ z=3-t\end{cases}$

và mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+z=0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm A của d và (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) qua A và vuông góc với d.

11. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B(-3\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $C(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $D(0\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và phương trình tham số của đường thẳng AD.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AD và song song với BC.

12. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(3\ ;\ -2\ ;\ -2)$, $B(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ và $D(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

c) Tìm toạ độ tiếp điểm của (S) và mặt phẳng (BCD).

13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng :

$$d_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad \text{và} \qquad d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t. \end{cases}$$

a) Chứng minh d_1 và d_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Viết phương trình mặt phẳng đó.

14. Trong không gian cho ba điểm A, B, C.

a) Xác định điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = k^2$, với k là hằng số.

15. Cho hai đường thẳng chéo nhau

$$d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \text{và} \qquad d' : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

a) Viết phương trình các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau và lần lượt chứa d và d'.

b) Lấy hai điểm $M(2 ; -1 ; 1)$ và $M'(2 ; 0 ; 1)$ lần lượt trên d và d'. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (β) và khoảng cách từ M' đến mặt phẳng (α). So sánh hai khoảng cách đó.

16. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $4x + y + 2z + 1 = 0$ và mặt phẳng (β) có phương trình $2x - 2y + z + 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng (α) cắt (β).

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng d là giao của (α) và (β).

c) Tìm điểm M' là ảnh của $M(4 ; 2 ; 1)$ qua phép đối xứng qua mặt phẳng (α).

d) Tìm điểm N' là ảnh của $N(0 ; 2 ; 4)$ qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP VÀ ĐÁP SỐ

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN

§1. Khái niệm về khối đa diện

1 và **2.** Sử dụng tính chất : Mỗi cạnh của một đa diện là cạnh chung của đúng hai mặt.

3. Chia hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* thành năm tứ diện : *AB'CD'*, *A'AB'D'*, *BACB'*, *C'B'CD'*, *DACD'*.

4. Chia hình lập phương thành hai lăng trụ bằng nhau rồi chia mỗi lăng trụ thành ba tứ diện bằng nhau.

§2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều

2. Tỉ số đó bằng $2\sqrt{3}$.

3. Gọi (*H*) là hình tứ diện đều cạnh *a*. Khi đó tâm của các mặt của (*H*) tạo thành một tứ diện (*H'*) có sáu cạnh đều bằng $\frac{a}{3}$.

4. Để ý rằng *B*, *C*, *D*, *E* cách đều *A* và *F* nên chúng đồng phẳng.

§3. Khái niệm về thể tích khối đa diện

1. $a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$.

2. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

3. Tỉ số của thể tích là 3.

4. Tính diện tích tam giác theo hai cạnh và góc xen giữa.

5. $V_{D.CEF} = \frac{a^3}{36}$.

6. Gọi *h* là độ dài đường vuông góc chung của *d* và *d'*, α là góc giữa hai đường thẳng *d* và *d'*.

Khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6}hab.\sin\alpha$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

5. $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

6. a) Tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{5}{8}$;

b) $V_{S.DBC} = \frac{a^3 5\sqrt{3}}{96}$.

7. $V_{S.ABC} = 8\sqrt{3}.a^3$

8. $V = \frac{abc^5(a^2 + b^2 + 2c^2)}{6(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$.

9. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$

10. $V = \frac{5a^3}{18\sqrt{3}}$.

11. Tỉ số thể tích của chúng bằng 1.

12. a) $V_{ADMN} = \frac{a^3}{6}$;

b) Tỉ số thể tích phải tìm là $\frac{55}{89}$.

Chương II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. Khái niệm về mặt tròn xoay

2. a) Hình trụ ;

b) Hình nón ;

c) Khối nón ;

d) Khối trụ.

3. a) $S_{xq} \approx 2514,5\ \text{cm}^2$;

b) V = 13 089,969 cm^3 ;

c) 500 cm^2.

4. Mặt nón nhận *AB* làm trục, góc ở đỉnh bằng 60°.

5. a) $S_{xq} \approx 219{,}91\,\text{cm}^2$; $V \approx 549{,}77\,\text{cm}^3$;

b) $56\,\text{cm}^2$.

6. $S_{xq} = 2\pi a^2$; $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}\cdot$

7. a) $S_{xq} = 2\sqrt{3}\pi r^2$; $S_{tp} = 2(\sqrt{3}+1)\pi r^2$;

b) $V = \sqrt{3}\pi r^3$;

c) $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}\cdot$

8. a) $\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{1}{2}\cdot$

9. a) $S_{xq} = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$; $S_{\text{đáy}} = \dfrac{\pi a^2}{2}$;

$V = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$;

b) $S_{\Delta SBC} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}\cdot$

10. $S_{ABCD} = \dfrac{5r^2}{2}$; $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\cdot$

§2. Mặt cầu

1. Tập hợp các điểm M luôn nhìn AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB.

2. $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$

3. Tập hợp tâm các mặt cầu luôn chứa một đường tròn cố định cho trước là một đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn đó tại tâm của đường tròn.

4. Tập hợp tâm những mặt cầu cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước là trục của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

5. b) $d^2 - r^2$.

7. a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$.

10. $S = \pi(a^2+b^2+c^2)$;

$V = \dfrac{1}{6}\pi(a^2+b^2+c^2).\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Câu a) và d) đúng.

2. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{2}$; $V = \dfrac{\pi a^3}{3}\cdot$

5. a) $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$;

b) $S_{xq} = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$; $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}\cdot$

6. $r = \dfrac{3a}{4}$; $S = \dfrac{9\pi a^2}{4}$; $V = \dfrac{9\pi a^3}{16}\cdot$

7. b) $\dfrac{3}{2}\cdot$

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ toạ độ trong không gian

1. a) $\vec{d} = \left(11 ; \dfrac{1}{3} ; 18\dfrac{1}{3}\right)$;

b) $\vec{e} = (0 ; -27 ; 3)$.

2. $G = \left(\dfrac{2}{3} ; 0 ; \dfrac{4}{3}\right)$.

3. $A'(3 ; 5 ; -6)$, $B' = (4 ; 6 ; -5)$,
$C = (2 ; 0 ; 2)$, $D' = (3 ; 4 ; -6)$.

4. a) $\vec{a}.\vec{b} = 6$;

b) $\vec{c}.\vec{d} = -21$.

5. a) Mặt cầu tâm $O = (4 ; 1 ; 0)$, có bán kính $r = 4$;

b) Mặt cầu tâm $I = \left(1 ; -\dfrac{4}{3} ; -\dfrac{5}{2}\right)$, có bán kính $r = 3\dfrac{1}{6}$.

6. a) Mặt cầu có phương trình là :

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9 ;$$

b) Mặt cầu có phương trình là :

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

§2. Phương trình mặt phẳng

1. a) $2x + 3y + 5z - 16 = 0$;
b) $x - 3y + 3z - 9 = 0$;
c) $2x + 3y + 6z + 6 = 0$.

2. $x - y - 2z + 9 = 0$.

3. a) $z = 0$; $x = 0$; $y = 0$;
b) $z = -3$; $x = 2$; $y = 6$.

4. a) $2y + z = 0$; b) $3x + z = 0$;
c) $4x + 3y = 0$.

5. a) $(ACD) : 2x + y + z - 14 = 0$;
$(BCD) : 6x + 5y + 3z - 42 = 0$;
b) $(\alpha) : 10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

6. $(\alpha) : 2x - y + 3z - 11 = 0$.

7. $(\alpha) : x - 2z + 1 = 0$.

8. a) $n = -4$, $m = 4$;
b) $n = -\dfrac{10}{3}$, $m = \dfrac{-9}{2}$.

9. a) 5 ; b) $\dfrac{44}{13}$; c) 2.

10. a) Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $A = (0 ; 0 ; 0)$, $B = (1 ; 0 ; 0)$, $D = (0 ; 1 ; 0)$, $A' = (0 ; 0 ; 1)$. Sau đó viết phương trình của hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$, từ đó suy ra chúng song song với nhau.

b) $d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

§3. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. a) $d : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$; b) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$;

c) $d : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$; d) $d : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

2. a) $d' : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$; b) $d'' : \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

3. a) d cắt d' ; b) $d \,//\, d'$.

4. $a = 0$.

5. a) 1 điểm chung ;
b) 0 điểm chung ;
c) vô số điểm chung.

6. $d(\Delta , (\alpha)) = \dfrac{2}{3}$.

7. a) $H\left(\dfrac{3}{2} ; 0 ; -\dfrac{1}{2}\right)$; b) $A'(2 ; 0 ; -1)$;

c) $AH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. a) $H(-1 ; 2 ; 0)$; b) $M'(-3 ; 0 ; -2)$;
c) $MH = 2\sqrt{3}$.

10. $d(A, (A'BD)) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $d(A, (B'D'C)) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD), chứng minh $A \notin (BCD)$;

b) Góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 45° ;

c) $AH = 1$ (H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống (BCD)).

2. a) $I(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\ ;\ r=\sqrt{62}$;

b) $(S) : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=62$;

c) $(\alpha) : 5x+y-6z-62=0$.

3. a) $(BCD) : 8x-3y-2z+4=0$;

b) $AH=\dfrac{36}{\sqrt{77}}$;

c) $(\alpha) : x-z+5=0$.

4. a) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-3+3t \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-4t \\ z=-5-5t. \end{cases}$

5. $J(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)\ ;\ r=\sqrt{R^2-d^2}=8$.

6. a) $M(0\ ;\ 0\ ;\ -2)$;

b) $4x+3y+z+2=0$.

7. a) $6x-2y-3z+1=0$;

b) $M(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$;

c) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-3t \\ z=3+6t. \end{cases}$

8. $4x+6y+5z+51\pm5\sqrt{77}=0$.

9. $H(-3\ ;\ 1\ ;\ -2)$.

10. $M'(6\ ;\ 13\ ;\ -4)$.

11. $\Delta : \begin{cases} x=\dfrac{3}{7} \\ y=-\dfrac{25}{7}+t \\ z=\dfrac{18}{7}. \end{cases}$

12. $A'(-3\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Dùng phép đối xứng tâm I.

2. $V=\dfrac{25}{72}a^3$.

3. a) $V=\dfrac{1}{3}\pi(2r-h)h^2$;

b) V đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{32\pi r^3}{81}$ khi $h=\dfrac{4r}{3}$.

4. a) $d\ //\ AB$;

b) $I(2\ ;\ 0\ ;\ 4)$.

5. a) $V=8\ \text{cm}^3$;

b) $d(A, (BCD))=\dfrac{12}{\sqrt{34}}$.

6. a) $S=16\pi a^2$; $V=\dfrac{32}{3}\pi a^3$;

b) $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ r'=r=2a$;

c) $S_{xq}=4\pi a^2\sqrt{3}$; $V=4\pi a^3\sqrt{3}$.

7. a) $\begin{cases} \vec{a}_{d_1}\neq k\vec{a}_{d_2} \\ d_1\cap d_2=\varnothing \end{cases}$;

b) $(\alpha) : 2x-y-3z-2=0$.

8. a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

b) $d(D, (ABC))=\dfrac{|3-6-3|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}$.

c) Phương trình của mặt cầu là

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-0{,}5)^2=\frac{41}{4}.$$

d) $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{21}.\sqrt{14}.\sqrt{6}=7$.

9. a) $V=\dfrac{4}{3}$;

b) $(S) : (x-\dfrac{3}{2})^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\dfrac{21}{4}$;

c) $(\alpha_1) : z-1-\dfrac{\sqrt{21}}{2}=0$;

$(\alpha_2) : z-1+\dfrac{\sqrt{21}}{2}=0$.

10. a) $A\left(-\frac{10}{4}\,;\frac{15}{4}\,;\frac{5}{4}\right)$;

b) $(\beta): 4x-2y+2z+15=0$.

11. a) $(ABC): 3x-5y-2z+13=0$;

$$AD: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=-2t. \end{cases}$$

b) $(\alpha): 5x-9y-2z+23=0$.

12. a) $(BCD): x+2y+3z-7=0$;

b) $(S): (x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14$;

c) $H(4\,;0\,;1)$.

13. a) d_1 cắt d_2 tại $M(2\,;3\,;1)$.

b) Phương trình mặt phẳng (d_1, d_2) là

$6x-8y+z+11=0$.

14. a) G xác định bởi : $\overrightarrow{AG}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

b) Chứng minh

$$GM^2=k^2-(GA^2+2GB^2-2GC^2).$$

15. a) $(\alpha): 2x-y-3z-2=0$;

$(\beta): 2x-y-3z-1=0$;

b) $d(M', (\alpha))=d(M, (\beta))=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

16. b) $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-1-2t \end{cases}$;

c) $M'(-4\,;0\,;-3)$;

d) $N'(-4\,;0\,;2)$.

BẢNG THUẬT NGỮ

D

Diện tích toàn phần 33,37
Diện tích mặt cầu 48
Diện tích xung quanh 32,36

Đ

Đa diện 6
Đáy của hình trụ 35
Điểm ngoài 5,6
Điểm tiếp xúc 46
Điểm trong 56
Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau 84
Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc 74
Đỉnh của hình nón 32
Đường kính mặt cầu 42
Đường sinh của mặt nón 31
Đường sinh của mặt trụ 35
Đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu 46
Đường tròn lớn 45

G

Góc ở đỉnh của mặt nón 31
Giao của mặt cầu và mặt phẳng 43
Giao của mặt cầu với đường thẳng 45

H

Hai hình bằng nhau 10
Hệ toạ độ *Oxyz* 62
Hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc *Oxyz* 62
Hình đa diện 6
Hình nón tròn xoay (hình nón) 32
Hình trụ tròn xoay (hình trụ) 35

K

Khoảng cách giữa hai điểm 66
Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 78
Khối bát diện đều (hình tám mặt đều) 16
Khối cầu 42
Khối chóp 4
Khối đa diện 6
Khối đa diện đều 15
Khối đa diện đều loại {*p* ; *q*} 15
Khối đa diện lồi 14
Khối lăng trụ 4
Khối lập phương 15
Khối lập phương đơn vị 21
Khối trụ tròn xoay (khối nón) 32
Khối tứ diện đều 15
Khối trụ tròn xoay (khối trụ) 36
Kinh tuyến 43

M

Mặt cầu 41
Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện 47
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện 47
Mặt nón tròn xoay 31
Mặt tròn xoay 31
Mặt trụ tròn xoay 35
Mặt phẳng kính 45
Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu 44
Mặt phẳng toạ độ 62
Mặt xung quanh của hình nón 32
Mặt xung quanh của hình trụ 35
Miền ngoài 6
Miền trong 6

P

Phân chia và lắp ghép các khối đa diện 10
Phép biến hình trong không gian 8
Phép dời hình trong không gian 8
Phép đối xứng qua đường thẳng 9
Phép đối xứng qua mặt phẳng 9
Phép đối xứng tâm 9
Phép tịnh tiến 8
Phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn 74
Phương trình mặt cầu 66
Phương trình tham số của đường thẳng 83
Phương trình tổng quát của mặt phẳng 71

T

Thể tích khối đa diện 21
Thể tích khối cầu 48
Thể tích khối chóp 23
Thể tích khối hộp chữ nhật 22
Thể tích khối lăng trụ 23
Thể tích khối nón 34
Thể tích khối trụ tròn xoay 37
Tích có hướng 70
Tích vô hướng 65
Tiếp diện của mặt cầu 44
Tiếp tuyến của mặt cầu 46
Toạ độ của điểm 63
Toạ độ của vectơ 64
Trục của mặt nón 31
Trục của mặt tròn xoay 31
Trục của mặt trụ 35

V

Vectơ đơn vị 62
Vectơ pháp tuyến 69
Vĩ tuyến 43

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN

§1. Khái niệm về khối đa diện 4
- I- Khối lăng trụ và khối chóp 4
- II- Khái niệm về hình đa diện và khối đa diện 5
- III- Hai đa diện bằng nhau 8
- IV- Phân chia và lắp ghép các khối đa diện 10
- Bài tập 12
- *Bài đọc thêm.* Định nghĩa đa diện và khối đa diện 12

§2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều 14
- I- Khối đa diện lồi 14
- II- Khối đa diện đều 15
- Bài tập 18
- *Bài đọc thêm.* Hình đa diện đều 19

§3. Khái niệm về thể tích của khối đa diện 21
- I- Khái niệm về thể tích khối đa diện 21
- II- Thể tích khối lăng trụ 23
- III- Thể tích khối chóp 23
- Bài tập 25
- Ôn tập chương I 26
- Câu hỏi trắc nghiệm chương I 27

CHƯƠNG II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. Khái niệm về mặt tròn xoay 30
- I- Sự tạo thành mặt tròn xoay 30
- II- Mặt nón tròn xoay 31
- III- Mặt trụ tròn xoay 35
- Bài tập 39

§2. Mặt cầu 41
- I- Mặt cầu và các khái niệm liên quan đến mặt cầu 41
- II- Giao của mặt cầu và mặt phẳng 43
- III- Giao của mặt cầu và đường thẳng. Tiếp tuyến của mặt cầu 45

IV- Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu 48

Bài tập 48

Ôn tập chương II 49

Câu hỏi trắc nghiệm chương II 50

Bài đọc thêm. Biểu diễn hình cầu như thế nào cho đúng ? 54

Bạn có biết. Những vấn đề liên quan đến kinh tuyến và vĩ tuyến của Trái Đất 55

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ toạ độ trong không gian 62

I- Toạ độ của điểm và của vectơ 62

II- Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ 64

III- Tích vô hướng 65

IV- Phương trình mặt cầu 66

Bài tập 68

§2. Phương trình mặt phẳng 69

I- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng 69

II- Phương trình tổng quát của mặt phẳng 71

III- Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc 74

IV- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 78

Bài tập 80

§3. Phương trình đường thẳng trong không gian 81

I- Phương trình tham số của đường thẳng 82

II- Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau 84

Bài tập 89

Ôn tập chương III 91

Câu hỏi trắc nghiệm chương III 94

Bài đọc thêm. Chùm mặt phẳng 97

Ôn tập cuối năm 99

Hướng dẫn giải bài tập và đáp số 103

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập nội dung : **HOÀNG NGỌC PHƯƠNG – LỤC VĂN HÀO**
Biên tập kĩ thuật : **BÙI NGỌC LAN**
Trình bày bìa : **NGUYỄN MẠNH HÙNG**
Minh hoạ : **NGUYỄN MẠNH HÙNG**
Sửa bản in : **PHÒNG SỬA BẢN IN** (NXBGD TẠI TP. HCM)
Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN** (NXBGD TẠI TP. HCM)

HÌNH HỌC 12
Mã số : CH202M8

In 770 cuốn (QĐ: In thử), khổ 17 x 24 cm.
In tại Công ty cổ phần In Diên Hồng 187^{B} Giảng Võ - Hà Nội.
Số in : 85. Số xuất bản : 720 - 2007/CXB/520 - 1571/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2008.

50 NĂM 1957-2007

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

LONDON QUALITY CROWN QC 100

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12

1. TOÁN HỌC
   - GIẢI TÍCH 12
   - HÌNH HỌC 12
2. VẬT LÍ 12
3. HOÁ HỌC 12
4. SINH HỌC 12
5. NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
6. LỊCH SỬ 12
7. ĐỊA LÍ 12
8. TIN HỌC 12
9. CÔNG NGHỆ 12
10. GIÁO DỤC CÔNG DÂN 12
11. NGOẠI NGỮ
    - TIẾNG ANH 12
    - TIẾNG PHÁP 12
    - TIẾNG NGA 12
    - TIẾNG TRUNG QUỐC 12

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 - NÂNG CAO

Ban Khoa học Tự nhiên :
- TOÁN HỌC (GIẢI TÍCH 12, HÌNH HỌC 12)
- VẬT LÍ 12 • HOÁ HỌC 12 • SINH HỌC 12

Ban Khoa học Xã hội và Nhân văn :
- NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
- LỊCH SỬ 12 • ĐỊA LÍ 12
- NGOẠI NGỮ (TIẾNG ANH 12, TIẾNG PHÁP 12, TIẾNG NGA 12, TIẾNG TRUNG QUỐC 12)

8 934980 805206

SÁCH IN THỬ